提要 366：殘值定理(Residue Theorem)的應用(4)

以下說明**殘值定理（Residue Theorem，或譯為留數定理）**的第四個應用範例。

範例一
已知 $f(z)=\dfrac{\cot z\coth z}{z^3}$，試求 $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$。

【解答】

本題無法一開始就辨明 $z=0$ 為函數 $f(z)=\dfrac{\cot z\coth z}{z^3}$ 之幾階極點，作者擬先透露其階數，再說明其解析過程。由最後之研討知，$z=0$ 為函數 $f(z)=\dfrac{\cot z\coth z}{z^3}$ 之五階極點。此一結論與多數讀者的判斷絕對不會一樣，這亦顯示**勞倫級數(Laurent Series)**展開方法的重要性，因該解析方法不必事先知道極點之階數。

由勞倫級數展開的觀念知，函數 $f(z)$ 以 $z=0$ 為中心點作勞倫級數展開時，原式可做以下之改寫：

$$
\begin{aligned}
f(z)&=\frac{\cot z\coth z}{z^3}\\
&=\frac{\cos z\cosh z}{z^3\sin z\sinh z}\\
&=\frac{\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+-\cdots\right)\left(1+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}+\dfrac{z^6}{6!}+\cdots\right)}{z^3\left(z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-+\cdots\right)\left(z+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots\right)}\\
&=\frac{\left(1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+-\cdots\right)\left(1+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}+\dfrac{z^6}{6!}+\cdots\right)}{z^5\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-+\cdots\right)\left(1+\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}+\cdots\right)}\\
&=\frac{1-\dfrac{z^4}{6}+-\cdots}{z^5\left(1-\dfrac{z^4}{90}+-\cdots\right)}\\
&=\frac{1}{z^5}\left(1-\frac{7}{45}z^4+-\cdots\right)
\end{aligned}
$$

由以上展開式知，$\boxed{z=0\text{ 為五階之極點}}$；此外，其中之係數 a_{-1} 為：

$$a_{-1}=-\frac{7}{45}$$

由殘值定理曉得，其中之係數 a_{-1} 即為函數 $f(z)$ 在 $z=0$ 之殘值，故：

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=a_{-1}=-\frac{7}{45}}$$

【附註】

本題有引用以下四個重要關係式：

1. $\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+\cdots$，$z$ 為任意值。
2. $\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+-\cdots$，$z$ 為任意值。
3. $\sinh z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots$，$z$ 為任意值。
4. $\cosh z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots$，$z$ 為任意值。