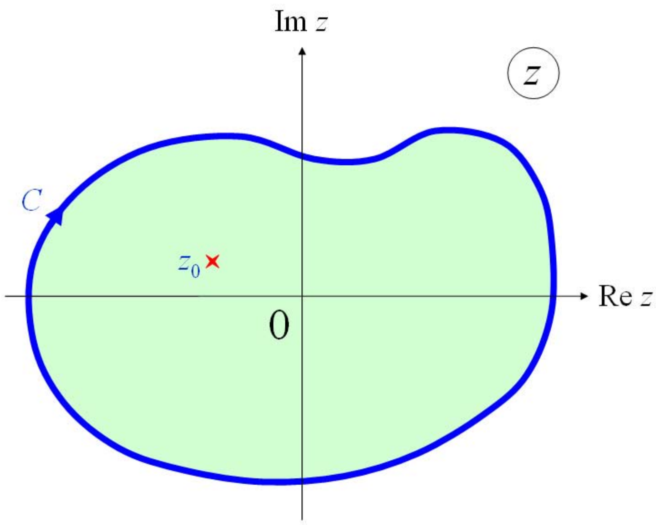
提要 365：殘值定理(Residue Theorem)的應用(3)

以下說明**殘值定理（Residue Theorem，或譯為留數定理）**的第三個應用範例。

範例一
試再解析 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^m} dz$，其中 m 為正整數，曲線 C 內包含 z_0，積分方向為逆鐘向。

【解答】

由題意知 $z=z_0$ 為函數 $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ 之 **m 階奇異點（Singular Point）**，其落在封閉積分曲線 C 之內部，如圖一所示：



圖一　有一個 m 階奇異點 z_0 落在封閉積分曲線 C 之內部

本題若採用勞倫級數(Laurent Series)展開方法求解，會較方便。由勞倫級數展開方法知，若 $z=z_0$ 為函數 $f(z)$ 之 m 階極點，則以 $z=z_0$ 為中心點作勞倫級數展開時，函數 $f(z)$ 可表為：

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots$$

找出其中之係數 a_{-1} 之後再乘以 $2\pi i$，則積分式 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^m}dz$ 之積分值即可求出。也就是說：

$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^m}dz = 2\pi i a_{-1}$$

由殘值定理曉得，其中之係數 a_{-1} 即為函數 $f(z)$ 在 z_0 之殘值：

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

今由題意知，積分函數 $\frac{1}{(z-z_0)^m}$ 以 $z=z_0$ 為中心點作勞倫級數展開時，其表示方式為：

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}+\frac{0}{(z-z_0)^{m-1}}+\frac{0}{(z-z_0)^{m-2}}+\cdots+\frac{0}{z-z_0}+0+0\times(z-z_0)+\cdots$$

由上式獲悉，當 $m\neq1$ 時，係數 a_{-1} 之值為 0；當 $m=1$ 時，係數 a_{-1} 之值為 1。故：

$$\boxed{\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^m}dz = 2\pi i a_{-1} = \begin{cases} 2\pi i, & m=1 \\ 0, & m\neq1 \end{cases}}$$

其積分方向為逆鐘向。