提要 364：殘值定理(Residue Theorem)的應用(2)

以下說明**殘值定理（Residue Theorem**，或譯為**留數定理）**的第二個應用範例。

範例一
試解析 $\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} + ze^{\frac{\pi}{z}} \right) dz$，其中曲線 C 為橢圓：$9x^2 + y^2 = 9$，積分方向為逆鐘向。

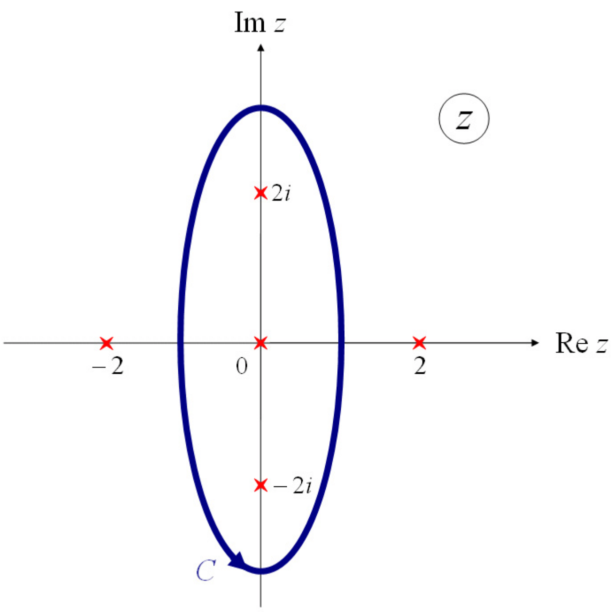
【解答】

原式是先進行相加的運算，再進行積分的運算。其可改寫為先進行積分的運算，再進行相加的運算：

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} + ze^{\frac{\pi}{z}} \right) dz = \oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} dz + \oint_C ze^{\frac{\pi}{z}} dz$$

其中 $z = \pm 2i$、± 2 為函數 $\frac{1}{z^4 - 16}$ 之奇異點(Singular Point)；$e^{\pi z} = 1 + (\pi z) + \frac{(\pi z)^2}{2!} + \frac{(\pi z)^3}{3!} + \cdots$ 為全函數（Entire Function，在複數平面上的每一個點均為解析之函數）；另外，$e^{\frac{\pi}{z}} = 1 + \frac{\pi}{z} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{z}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{z}\right)^3 + \cdots$，此一函數不可代入 $z = 0$，亦即該點為奇異點，且該點為本質奇異點（Essential Singularity，階數為∞之奇異點）。

由以上說明知，本題共有五個奇異點：$z = 0$、$z = \pm 2i$、$z = \pm 2$，而積分曲線為橢圓曲線 $9x^2 + y^2 = 9$，故一共有三個奇異點落在積分曲線之內部，如圖一所示：



圖一　有三個奇異點落在橢圓積分曲線之內部

已知殘值定理為：

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \cdots + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

其中 $z_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 為封閉積分曲線 C 內之奇異點(Singular Point)。已知積分函數為 $f(z)=\dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16}+ze^{\frac{\pi}{z}}$，其中函數 $f(z)$ 在 $z=0$ 與 $z=\pm 2i$ 之殘值可分別表為 $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$、$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)$ 與 $\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z)$，故由殘值定理知：

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)}$$

上式之解析方式可以有數種，實際解題時，僅需採用任意之一種方式即可。以下為數種解析方法的說明：

■ 關於 $\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z)$ 之解析

方法一　利用 Cauchy 積分公式 $\boxed{\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i g(z_0)}$ 求解，條件為：❶ $g(z)$ 在 C 上及 C 內都是解析的；❷ z_0 為 C 內之單極點。

首先，將原積分式改寫為：

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}+ze^{\frac{\pi}{z}}\right)dz = \oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz + \oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$$

其中 $z=-2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$ 之積分函數 $ze^{\frac{\pi}{z}}$ 而言，並非奇異點，故可直接引用 **Cauchy 積分定理**推求出其積分值為 0；另外，$z=-2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz$ 之積分函數 $\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ 而言，為一單極點（Simple Pole 或 Pole of Order One），故可根據 **Cauchy 積分公式**推求出其積分值：

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz &= \oint_C \frac{ze^{\pi z}}{(z+2)(z-2)(z+2i)(z-2i)}dz \\
&= \oint_C \frac{ze^{\pi z}/[(z+2)(z-2)(z-2i)]}{(z+2i)}dz \\
&= 2\pi i \left.\frac{ze^{\pi z}}{(z+2)(z-2)(z-2i)}\right|_{z=-2i} \\
&= 2\pi i \frac{(-2i)e^{\pi(-2i)}}{(-2i+2)(-2i-2)(-2i-2i)} \\
&= 2\pi i \frac{(-2i)(\cos 2\pi - i\sin 2\pi)}{[(-2i)^2-2^2](-4i)} \\
&= 2\pi i \frac{(-2i)(1)}{(-4-4)(-4i)} \\
&= 2\pi i \frac{-2i}{32i} \\
&= -\frac{\pi}{8}i
\end{aligned}$$

亦即 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) = -\frac{1}{16}}$。

方法二　利用單極點之殘值計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，條件為：

❶ $p(z_0)\neq 0$；❷ z_0 為 C 內之單極點。

首先，將原式改寫為：

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}+ze^{\frac{\pi}{z}}\right)dz = \oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz + \oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$$

其中 $z=-2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$ 之積分函數 $ze^{\frac{\pi}{z}}$ 而言，並非奇異點，故可直接引用 **Cauchy 積分定理**推求出其積分值為0；另外，$z=-2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz$ 之積分函數 $\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ 而言，為一單極點（Simple Pole 或 Pole of Order One），故可根據以上所示公式推求出其積分值：

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz &= 2\pi i\left.\frac{ze^{\pi z}}{(z^4-16)'}\right|_{z=-2i} \\
&= 2\pi i\left.\frac{ze^{\pi z}}{4z^3}\right|_{z=-2i} \\
&= 2\pi i\left.\frac{e^{\pi z}}{4z^2}\right|_{z=-2i} \\
&= 2\pi i\,\frac{e^{\pi(-2i)}}{4(-2i)^2} \\
&= 2\pi i\,\frac{\cos 2\pi - i\sin 2\pi}{4(-4)} \\
&= 2\pi i\left(-\frac{1}{16}\right)
\end{aligned}$$

亦即 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) = -\frac{1}{16}}$，故以此方式作解析，亦可得出相同結果。

方法三 利用單極點之另一個殘值計算公式 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \lim_{z \to z_0}[(z - z_0)f(z)]}$ 求解，條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

首先，仍將原式改寫為：

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} + ze^{\frac{\pi}{z}} \right) dz = \oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} dz + \oint_C ze^{\frac{\pi}{z}} dz$$

其中 $z = -2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}} dz$ 之積分函數 $ze^{\frac{\pi}{z}}$ 而言，並非奇異點，故可直接引用 **Cauchy 積分定理**推求出其積分值為 0；另外，$z = -2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} dz$ 之積分函數 $\frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16}$ 而言，為一單極點（Simple Pole 或 Pole of Order One），故可根據以上所示公式推求出其積分值：

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} dz &= \oint_C \frac{ze^{\pi z}}{(z+2)(z-2)(z+2i)(z-2i)} dz \\
&= 2\pi i \lim_{z \to -2i} \left[(z+2i) \frac{ze^{\pi z}}{(z+2)(z-2)(z+2i)(z-2i)} \right] \\
&= 2\pi i \lim_{z \to -2i} \left[\frac{ze^{\pi z}}{(z+2)(z-2)(z-2i)} \right] \\
&= 2\pi i \frac{(-2i)e^{\pi(-2i)}}{(-2i+2)(-2i-2)(-2i-2i)} \\
&= 2\pi i \frac{(-2i)(\cos 2\pi - i \sin 2\pi)}{[(-2i)^2 - 2^2](-4i)} \\
&= 2\pi i \frac{(-2i)(1)}{(-4-4)(-4i)} \\
&= 2\pi i \frac{-2i}{32i} \\
&= -\frac{\pi}{8} i
\end{aligned}$$

亦即 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) = -\frac{1}{16}}$，故以此方式求解亦可得出相同結果。

方法四　利用 $\boxed{\oint\limits_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}}$ 求解，其中 a_{-1} 為勞倫級數展開後 $\dfrac{1}{z-z_0}$ 項次所對應之係數。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之極點。}}$

首先，仍將原式改寫為：

$$\oint\limits_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\frac{\pi}{z}} \right) dz = \oint\limits_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} dz + \oint\limits_C ze^{\frac{\pi}{z}} dz$$

其中 $z=-2i$ 對封閉路線積分 $\oint\limits_C ze^{\frac{\pi}{z}}\, dz$ 之積分函數 $ze^{\frac{\pi}{z}}$ 而言，並非奇異點，故可直接引用 **Cauchy 積分定理**推求出其積分值為 0；另外，$z=-2i$ 對封閉路線積分 $\oint\limits_C \dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16} dz$ 之積分函數 $\dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ 而言，為一單極點（Simple Pole 或 Pole of Order One），封閉路線積分 $\oint\limits_C \dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16} dz$ 會有積分值，故需討論 $\dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ 對 $z=-2i$ 作 Laurent 級數展開之型態：

$$\begin{aligned}
\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} &= \frac{ze^{\pi z}}{(z^2+4)(z^2-4)} \\
&= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{z^2+4} + \frac{1}{z^2-4} \right) ze^{\pi z} \\
&= \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{4i}\left(\frac{-1}{z+2i} + \frac{1}{z-2i} \right) + \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{z+2} + \frac{1}{z-2} \right) \right] ze^{\pi z} \\
&= \left(\frac{1}{32i}\frac{1}{z+2i} - \frac{1}{32i}\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{32}\frac{1}{z+2} + \frac{1}{32}\frac{1}{z-2} \right) ze^{\pi z} \\
&= \left(-\frac{i}{32}\frac{1}{z+2i} + \frac{i}{32}\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{32}\frac{1}{z+2} + \frac{1}{32}\frac{1}{z-2} \right) ze^{\pi z} \\
&= \left[-\frac{i}{32}\frac{1}{z+2i} + \frac{i}{32}\frac{1}{(z+2i)-4i} - \frac{1}{32}\frac{1}{(z+2i)+2-2i} + \frac{1}{32}\frac{1}{z+2i-2i-2} \right] \left[(z+2i)-2i \right] e^{\pi[(z+2i)-2i]} \\
&= \left[-\frac{i}{32}\frac{1}{z+2i} + \frac{i}{32}\left(\frac{1}{-4i} \right) \frac{1}{1-\frac{(z+2i)}{4i}} - \frac{1}{32}\left(\frac{1}{2-2i} \right) \frac{1}{1-\frac{-(z+2i)}{2-2i}} + \frac{1}{32}\left(\frac{1}{-2i-2} \right) \frac{1}{1-\frac{-(z+2i)}{-2i-2}} \right] \\
&\quad \times \left[(z+2i)-2i \right] e^{\pi(z+2i)} e^{-2\pi i}
\end{aligned}$$

觀察得知，其中僅第二項 $-\dfrac{i}{32}\dfrac{1}{z+2i}$ 會產生 $1/(z+2i)$ 項次，且其係數為 $-\dfrac{i}{32}\times(-2i)\times e^{2\pi i}$，亦即 $\dfrac{1}{z-(-2i)}$ 項次所對應之係數 a_{-1} 為 $-\dfrac{1}{16}$，因 $a_{-1} = \operatorname*{Res}\limits_{z=-2i} f(z)$，故 $\boxed{\operatorname*{Res}\limits_{z=-2i} f(z) = -\dfrac{1}{16}}$。

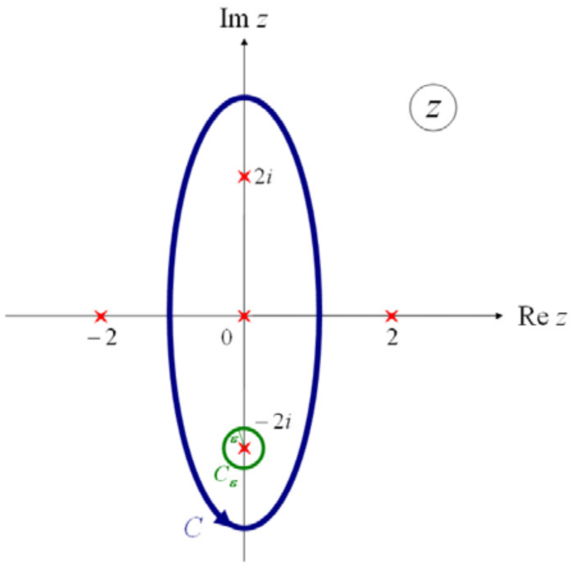
方法五　直接沿著積分曲線作線積分，配合對等路線積分的觀念。其應滿足之條件為：

$\boxed{z_0\text{ 為 }C\text{ 內之單極點。}}$

首先，仍將原式改寫為：

$$\oint_C\left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}+ze^{\frac{\pi}{z}}\right)dz=\oint_C\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz+\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$$

其中 $z=-2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$ 之積分函數 $ze^{\frac{\pi}{z}}$ 而言，並非奇異點，故可直接引用 **Cauchy 積分定理**推求出其積分值為 0；另外，$z=-2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz$ 之積分函數 $\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ 而言，為一單極點（Simple Pole 或 Pole of Order One），封閉路線積分 $\oint_C\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz$ 會有積分值，故需討論其封閉路線積分值。



圖二　封閉積分曲線 C_ε 可表為 $z=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(-2i+\varepsilon e^{i\theta}\right)$、$0\le\theta<2\pi$、$\varepsilon=$ 半徑

由對等路線積分的觀念知，可將包含 $z=-2i$ 之積分曲線改換為如圖二所示之線積分，亦即 $\operatorname*{Res}\limits_{z=-2i}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon}\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz$，其中封閉積分曲線 C_ε 可表為 $z=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\left(-2i+\varepsilon e^{i\theta}\right)$、$0\le\theta<2\pi$、$\varepsilon=$ 半徑，故：

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon} \frac{z e^{\pi z}}{z^4 - 16} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(-2i + \varepsilon e^{i\theta}) e^{\pi(-2i+\varepsilon e^{i\theta})}}{(-2i + \varepsilon e^{i\theta})^4 - 16} d(-2i + \varepsilon e^{i\theta}) \Big|_{\varepsilon \to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(-2i + \varepsilon e^{i\theta}) e^{\pi(-2i+\varepsilon e^{i\theta})}}{(-2i)^4 + 4(-2i)^3(\varepsilon e^{i\theta}) + 6(-2i)^2(\varepsilon e^{i\theta})^2 + 4(-2i)(\varepsilon e^{i\theta})^3 + (\varepsilon e^{i\theta})^4 - 16} (i\varepsilon e^{i\theta} d\theta) \Big|_{\varepsilon \to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(-2i + \varepsilon e^{i\theta}) e^{\pi(-2i+\varepsilon e^{i\theta})}}{16 + 32i(\varepsilon e^{i\theta}) + 6(-4)(\varepsilon e^{i\theta})^2 + 4(-2i)(\varepsilon e^{i\theta})^3 + (\varepsilon e^{i\theta})^4 - 16} (i\varepsilon e^{i\theta} d\theta) \Big|_{\varepsilon \to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(-2i + \varepsilon e^{i\theta}) e^{\pi(-2i+\varepsilon e^{i\theta})}}{32i(\varepsilon e^{i\theta}) - 24(\varepsilon e^{i\theta})^2 - 8i(\varepsilon e^{i\theta})^3 + (\varepsilon e^{i\theta})^4} (i\varepsilon e^{i\theta} d\theta) \Big|_{\varepsilon \to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(-2i + \varepsilon e^{i\theta}) e^{\pi(-2i+\varepsilon e^{i\theta})}}{32i - 24(\varepsilon e^{i\theta}) - 8i(\varepsilon e^{i\theta})^2 + (\varepsilon e^{i\theta})^3} (i d\theta) \Big|_{\varepsilon \to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(-2i + 0) e^{\pi(-2i+0)}}{32i - 24(0) - 8i(0)^2 + (0)^3} (i d\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(-2i)(\cos 2\pi - i \sin 2\pi)}{32i} (i d\theta) \\
&= -\frac{1}{32\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= -\frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

因此 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) = -\frac{1}{16}}$ ，所得結果再次相同。

■ 關於 $\underset{z=2i}{\text{Res}}\, f(z)$ 之推導

方法一 利用 Cauchy 積分公式 $\boxed{\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i g(z_0)}$ 求解，條件為：$\boxed{\text{❶ } g(z) \text{ 在 } C \text{ 上及 } C \text{ 內都是解析的；❷ } z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

首先，將原積分式改寫為：

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\frac{\pi}{z}} \right) dz = \oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} dz + \oint_C ze^{\frac{\pi}{z}} dz$$

其中 $z=2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}\, dz$ 之積分函數 $ze^{\frac{\pi}{z}}$ 而言，並非奇異點，故可直接引用 **Cauchy 積分定理**推求出其積分值為 0；另外，$z=2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} dz$ 之積分函數 $\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ 而言，為一單極點（Simple Pole 或 Pole of Order One），故可根據 **Cauchy 積分公式**推求出其積分值：

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} dz &= \oint_C \frac{ze^{\pi z}}{(z+2)(z-2)(z+2i)(z-2i)} dz \\
&= \oint_C \frac{ze^{\pi z}/[(z+2)(z-2)(z+2i)]}{(z-2i)} dz \\
&= 2\pi i \left. \frac{ze^{\pi z}}{(z+2)(z-2)(z+2i)} \right|_{z=2i} \\
&= 2\pi i \frac{(2i)e^{\pi(2i)}}{(2i+2)(2i-2)(2i+2i)} \\
&= 2\pi i \frac{(2i)(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)}{[(2i)^2-2^2](4i)} \\
&= 2\pi i \frac{(2i)(1)}{(-4-4)(4i)} \\
&= 2\pi i \frac{2i}{-32i} \\
&= -\frac{\pi}{8} i
\end{aligned}$$

亦即 $\boxed{\underset{z=2i}{\text{Res}}\, f(z) = -\frac{1}{16}}$。

方法二　利用單極點之殘值計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，條件為：

$\boxed{❶\ p(z_0)\neq 0 \text{；} ❷\ z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

首先，將原式改寫為：

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}+ze^{\frac{\pi}{z}}\right)dz = \oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz + \oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$$

其中 $z=2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$ 之積分函數 $ze^{\frac{\pi}{z}}$ 而言，並非奇異點，故可直接引用 **Cauchy 積分定理**推求出其積分值為 0；另外，$z=2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz$ 之積分函數 $\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ 而言，為一單極點（Simple Pole 或 Pole of Order One），故可根據以上所示公式推求出其積分值：

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz &= 2\pi i \left.\frac{ze^{\pi z}}{(z^4-16)'}\right|_{z=2i} \\ &= 2\pi i \left.\frac{ze^{\pi z}}{4z^3}\right|_{z=2i} \\ &= 2\pi i \left.\frac{e^{\pi z}}{4z^2}\right|_{z=2i} \\ &= 2\pi i \frac{e^{\pi(2i)}}{4(2i)^2} \\ &= 2\pi i \frac{\cos 2\pi + i\sin 2\pi}{4(-4)} \\ &= 2\pi i\left(-\frac{1}{16}\right)\end{aligned}$$

亦即 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = -\frac{1}{16}}$，故以此方式作解析，亦可得出相同結果。

方法三　利用單極點之另一個殘值計算公式 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]}$ 求解，條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

首先，仍將原式改寫為：

$$\oint_C\left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}+ze^{\frac{\pi}{z}}\right)dz=\oint_C\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz+\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$$

其中 $z=2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$ 之積分函數 $ze^{\frac{\pi}{z}}$ 而言，並非奇異點，故可直接引用 **Cauchy 積分定理**推求出其積分值為0；另外，$z=2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz$ 之積分函數 $\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ 而言，為一單極點（Simple Pole 或 Pole of Order One），故可根據以上所示公式推求出其積分值：

$$\begin{aligned}\oint_C\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz&=\oint_C\frac{ze^{\pi z}}{(z+2)(z-2)(z+2i)(z-2i)}dz\\&=2\pi i\lim_{z\to 2i}\left[(z-2i)\frac{ze^{\pi z}}{(z+2)(z-2)(z+2i)(z-2i)}\right]\\&=2\pi i\lim_{z\to 2i}\left[\frac{ze^{\pi z}}{(z+2)(z-2)(z+2i)}\right]\\&=2\pi i\frac{(2i)e^{\pi(2i)}}{(2i+2)(2i-2)(2i+2i)}\\&=2\pi i\frac{(2i)(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)}{[(2i)^2-2^2](4i)}\\&=2\pi i\frac{(2i)(1)}{(-4-4)(4i)}\\&=2\pi i\frac{2i}{-32i}\\&=-\frac{\pi}{8}i\end{aligned}$$

亦即 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)=-\frac{1}{16}}$，故以此方式求解亦可得出相同結果。

方法四　利用 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}}$ 求解，其中 a_{-1} 為勞倫級數展開後 $\dfrac{1}{z-z_0}$ 項次所對應之係數。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之極點。}}$

首先，仍將原式改寫為：

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\frac{\pi}{z}}\right)dz = \oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz + \oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$$

其中 $z=2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$ 之積分函數 $ze^{\frac{\pi}{z}}$ 而言，並非奇異點，故可直接引用 **Cauchy 積分定理**推求出其積分值為 0；另外，$z=2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C \dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz$ 之積分函數 $\dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ 而言，為一單極點（Simple Pole 或 Pole of Order One），封閉路線積分 $\oint_C \dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz$ 會有積分值，故需討論 $\dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ 對 $z=2i$ 作 Laurent 級數展開之型態：

$$\begin{aligned}
\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} &= \frac{ze^{\pi z}}{(z^2+4)(z^2-4)} \\
&= \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{z^2+4} + \frac{1}{z^2-4}\right)ze^{\pi z} \\
&= \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{4i}\left(\frac{-1}{z+2i} + \frac{1}{z-2i}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{z+2} + \frac{1}{z-2}\right)\right]ze^{\pi z} \\
&= \left(\frac{1}{32i}\frac{1}{z+2i} - \frac{1}{32i}\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{32}\frac{1}{z+2} + \frac{1}{32}\frac{1}{z-2}\right)ze^{\pi z} \\
&= \left(-\frac{i}{32}\frac{1}{z+2i} + \frac{i}{32}\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{32}\frac{1}{z+2} + \frac{1}{32}\frac{1}{z-2}\right)ze^{\pi z} \\
&= \left[-\frac{i}{32}\frac{1}{(z-2i)+4i} + \frac{i}{32}\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{32}\frac{1}{(z-2i)+2+2i} + \frac{1}{32}\frac{1}{z-2i+2i-2}\right][(z-2i)+2i]e^{\pi[(z-2i)+2i]} \\
&= \left[-\frac{i}{32}\frac{1}{4i}\frac{1}{1-\frac{-(z-2i)}{4i}} + \frac{i}{32}\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{32}\frac{1}{2+2i}\frac{1}{1-\frac{-(z-2i)}{2+2i}} + \frac{1}{32}\frac{1}{2i-2}\frac{1}{1-\frac{-(z-2i)}{2i-2}}\right] \\
&\quad \times [(z-2i)+2i]e^{\pi(z-2i)}e^{2\pi i}
\end{aligned}$$

觀察得知，其中僅第二項 $+\dfrac{i}{32}\dfrac{1}{z-2i}$ 會產生 $1/(z-2i)$ 項次，且其係數為 $\dfrac{i}{32}\times 2i \times e^{2\pi i}$，亦即 $\dfrac{1}{z-2i}$ 項次所對應之係數 a_{-1} 為 $-\dfrac{1}{16}$，因 $a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z)$，故 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = -\dfrac{1}{16}}$。

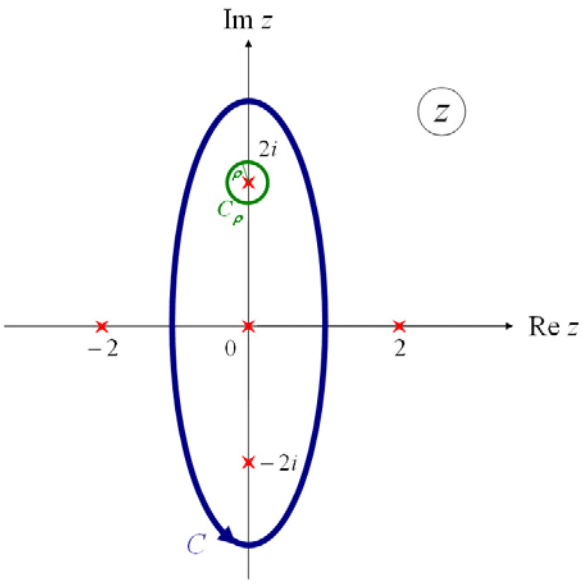
方法五　直接沿著積分曲線作線積分，配合對等路線積分的觀念。其應滿足之條件為：

$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

首先，仍將原式改寫為：

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\frac{\pi}{z}} \right) dz = \oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}\,dz + \oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}\,dz$$

其中 $z=2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}\,dz$ 之積分函數 $ze^{\frac{\pi}{z}}$ 而言，並非奇異點，故可直接引用 **Cauchy 積分定理**推求出其積分值為 0；另外，$z=2i$ 對封閉路線積分 $\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}\,dz$ 之積分函數 $\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ 而言，為一單極點（Simple Pole 或 Pole of Order One），封閉路線積分 $\oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}\,dz$ 會有積分值，故需討論其封閉路線積分值。



圖三　封閉積分曲線 C_ρ 可表為 $z=\lim\limits_{\rho\to 0}\left(2i+\rho e^{i\theta}\right)$、$0\le\theta<2\pi$ 、 $\rho=$ 半徑

由對等路線積分的觀念知，可將包含 $z=2i$ 之積分曲線改換為如圖三所示之線積分，亦即 $\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}\,dz$，其中封閉積分曲線 C_ε 可表為 $z=\lim\limits_{\rho\to 0}\left(2i+\rho e^{i\theta}\right)$、$0\le\theta<2\pi$ 、 $\rho=$ 半徑，故：

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}\,dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(2i+\rho e^{i\theta})e^{\pi(2i+\rho e^{i\theta})}}{(2i+\rho e^{i\theta})^4-16}\,d(2i+\rho e^{i\theta})\Big|_{\rho\to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(2i+\rho e^{i\theta})e^{\pi(2i+\rho e^{i\theta})}}{(2i)^4+4(2i)^3(\rho e^{i\theta})+6(2i)^2(\rho e^{i\theta})^2+4(2i)(\rho e^{i\theta})^3+(\rho e^{i\theta})^4-16}(i\rho e^{i\theta}d\theta)\Big|_{\rho\to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(2i+\rho e^{i\theta})e^{\pi(2i+\rho e^{i\theta})}}{16-32i(\rho e^{i\theta})+6(-4)(\rho e^{i\theta})^2+4(2i)(\rho e^{i\theta})^3+(\rho e^{i\theta})^4-16}(i\rho e^{i\theta}d\theta)\Big|_{\rho\to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(2i+\rho e^{i\theta})e^{\pi(2i+\rho e^{i\theta})}}{-32i(\rho e^{i\theta})-24(\rho e^{i\theta})^2+8i(\rho e^{i\theta})^3+(\rho e^{i\theta})^4}(i\rho e^{i\theta}d\theta)\Big|_{\rho\to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(2i+\rho e^{i\theta})e^{\pi(2i+\rho e^{i\theta})}}{-32i-24(\rho e^{i\theta})+8i(\rho e^{i\theta})^2+(\rho e^{i\theta})^3}(id\theta)\Big|_{\rho\to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(2i+0)e^{\pi(2i+0)}}{-32i-24(0)+8i(0)^2+(0)^3}(id\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(2i)(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)}{-32i}(id\theta) \\
&= -\frac{1}{32\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= -\frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

因此 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = -\frac{1}{16}}$，所得結果再次相同。

■ 關於 $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$ 之推導

方法一　利用 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}}$ 求解，其中 a_{-1} 為勞倫級數展開後 $\dfrac{1}{z-z_0}$ 項次所對應之係數。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之極點。}}$

本題僅適於採用勞倫級數展開方法求解【附註一】，說明如下。首先，仍將原式改寫為：

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\frac{\pi}{z}}\right)dz = \oint_C \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz + \oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$$

其中 $z=0$ 對封閉路線積分 $\oint_C \dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16}dz$ 之積分函數 $\dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$ 而言，並非奇異點，故可直接引用 **Cauchy 積分定理**推求出其積分值為 0；另外，$z=0$ 對封閉路線積分 $\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$ 之積分函數 $ze^{\frac{\pi}{z}}$ 而言，為**本質奇異點（Essential Singularity）**，封閉路線積分 $\oint_C ze^{\frac{\pi}{z}}dz$ 會有積分值，故需討論 $ze^{\frac{\pi}{z}}$ 對 $z=0$ 作 Laurent 級數展開之型態：

$$\begin{aligned} ze^{\frac{\pi}{z}} &= z\left[1+\frac{\pi}{z}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{z}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{z}\right)^3+\cdots\right] \\ &= z+\pi+\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{z}+\frac{\pi^3}{6}\frac{1}{z^2}+\cdots \end{aligned}$$

觀察得知，其中 $1/z$ 項次所對應之係數 a_{-1} 為 $\dfrac{\pi^2}{2}$，因 $a_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$，故 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\dfrac{\pi^2}{2}}$。

■ 答案最後整理

由之前的研討知：

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-2i} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$$

所以問題之解為：

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{16}\right)+2\pi i\left(-\frac{1}{16}\right)+2\pi i\left(\frac{\pi^2}{2}\right)=\left(-\frac{\pi}{4}+\pi^3\right)i}$$

【附註一】

由本題之解析得知，勞倫級數展開方法是所有解析方法中最重要的一種，因在本質奇異點情況，僅此一解析方法可推求出問題之解，所以讀者務必學會此種解析方法。