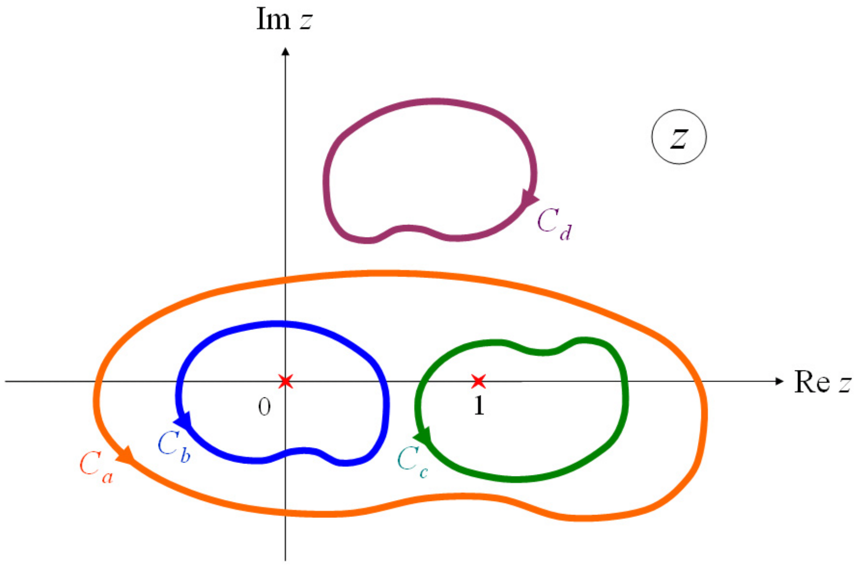
提要 363：殘值定理(Residue Theorem)的應用(1)

以下說明**殘值定理（Residue Theorem，或譯為留數定理）**的第一個應用範例。

範例一

試解析 $\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz$ ，其中曲線 C 之積分方向為逆鐘向，如以下所示之四種情況。



圖一　四種封閉積分路徑示意圖

【解答】

由殘值定理知：

$$\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \cdots + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)}$$

其中 $z_i(i=1,2,\cdots,n)$ 為封閉積分曲線 C 內之奇異點(Singular Point)。由題意知，考慮積分函數 $f(z)=\frac{4-3z}{z^2-z}$ 之分母為零時，即 $z^2-z=0$，可得知 $z=0$ 與 $z=1$ 為函數 $f(z)$ 之單極點（Simple Pole 或 Pole of Order 1）。其中函數 $f(z)$ 在 $z=0$ 與 $z=1$ 之殘值可分別表為 $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$ 與 $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$，且其推導方式可以有五種，實際解題時，僅需採用任意之一種方法即可。這五種解析方法說明如下：

■ 關於 $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$ 之解析

方法一 利用 Cauchy 積分公式 $\boxed{\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i g(z_0)}$ 求解，條件為：$\boxed{\text{❶ } g(z) \text{ 在 } C \text{ 上}}$

$\boxed{\text{及 } C \text{ 內都是解析的；❷ } z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

基於此，可知：

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz = \oint_C \frac{4-3z}{z(z-1)}dz = \oint_C \frac{(4-3z)/(z-1)}{z}dz = 2\pi i \left.\frac{4-3z}{z-1}\right|_{z=0} = 2\pi i\frac{4-3(0)}{(0)-1} = -8\pi i$$

亦即 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -4}$ 。

方法二 利用單極點之殘值計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，條件為：

$\boxed{\text{❶ } p(z_0) \neq 0 \text{；❷ } z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

由此可知：

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz = 2\pi i\left.\frac{4-3z}{(z^2-z)'}\right|_{z=0} = 2\pi i\left.\frac{4-3z}{2z-1}\right|_{z=0} = 2\pi i\frac{4-3(0)}{2(0)-1} = -8\pi i$$

亦即 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -4}$ ，故亦可得出相同結果。

方法三 利用單極點之另一個殘值計算公式 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]}$ 求解，

條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$

由以上公式知：

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}\,dz = 2\pi i \lim_{z\to 0}\left[(z-0)\frac{4-3z}{z(z-1)}\right] = 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{4-3z}{(z-1)} = 2\pi i\,\frac{4-3(0)}{(0)-1} = -8\pi i$$

亦即 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -4}$，故以此方式求解亦可得出相同結果。

方法四 利用 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}}$ 求解，其中 a_{-1} 為勞倫級數展開後 $\frac{1}{z-z_0}$ 項次所對應之係數。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之極點。}}$

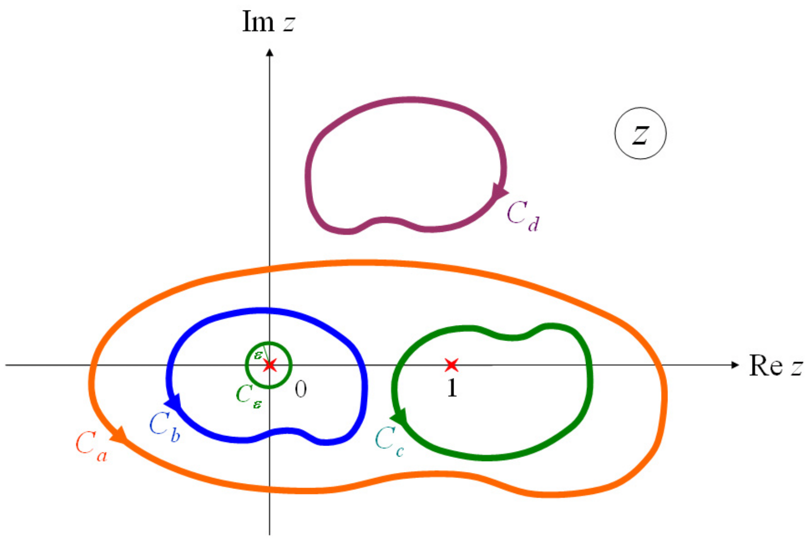
函數 $f(z)=\frac{4-3z}{z^2-z}$ 需以 $z=0$ 為中心點作 Laurent 級數展開，其關係式如下：

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{4-3z}{z^2-z} \\
&= \frac{4-3z}{z(z-1)} \\
&= \frac{4-3z}{z}\times\frac{1}{z-1} \\
&= \left(\frac{4}{z}-3\right)\left(-\frac{1}{1-z}\right) \\
&= -\left(\frac{4}{z}-3\right)\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right) \\
&= \left(-\frac{4}{z}-4-4z-4z^2-\cdots\right)+\left(3+3z+3z^2+3z^3+\cdots\right) \\
&= -\frac{4}{z}-1-z-z^2-\cdots
\end{aligned}$$

由上式可知，$\frac{1}{z}$ 項次所對應之係數 a_{-1} 為 -4，因 $a_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$，故 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -4}$。

方法五 直接沿著積分曲線作線積分，配合對等路線積分的觀念。其應滿足之條件為：

$\boxed{z_0 \text{ 為 } C \text{ 內之單極點。}}$



圖二　封閉積分曲線C_ε可表為$z=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{i\theta}$、$0\le\theta<2\pi$、$\varepsilon=$半徑

由對等路線積分的觀念知，可將包含$z=0$之積分曲線改換為如圖二所示之線積分，亦即$\operatorname*{Res}\limits_{z=0} f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C_\varepsilon} f(z)dz$，其中封閉積分曲線$C_\varepsilon$可表為$z=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon e^{i\theta}$、$0\le\theta<2\pi$、$\varepsilon=$半徑，故：

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon} f(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\varepsilon} \frac{4-3z}{z^2-z}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{4-3(\varepsilon e^{i\theta})}{(\varepsilon e^{i\theta})^2-(\varepsilon e^{i\theta})} d(\varepsilon e^{i\theta})\bigg|_{\varepsilon\to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{4-3(\varepsilon e^{i\theta})}{(\varepsilon e^{i\theta})^2-(\varepsilon e^{i\theta})} (i\varepsilon e^{i\theta}d\theta)\bigg|_{\varepsilon\to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{4-3(\varepsilon e^{i\theta})}{(\varepsilon e^{i\theta})-1} (id\theta)\bigg|_{\varepsilon\to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{4}{-1}(id\theta) \\
&= \frac{-4i}{2\pi i}(2\pi) \\
&= -4
\end{aligned}$$

故所得結果再次相同。

■ 關於 $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$ 之推導

方法一 利用 Cauchy 積分公式 $\boxed{\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i g(z_0)}$ 求解，條件為：❶ $g(z)$ 在 C 上及 C 內都是解析的；❷ z_0 為 C 內之單極點。

基於此，可知：

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz = \oint_C \frac{4-3z}{z(z-1)}dz = \oint_C \frac{(4-3z)/z}{z-1}dz = 2\pi i \left.\frac{4-3z}{z}\right|_{z=1} = 2\pi i \frac{4-3(1)}{1} = 2\pi i$$

亦即 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 1}$。

方法二 利用單極點之殘值計算公式 $\boxed{\oint_C \frac{p(z)}{q(z)}dz = 2\pi i \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ 求解，條件為：❶ $p(z_0) \neq 0$；❷ z_0 為 C 內之單極點。

由此可知：

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz = 2\pi i \left.\frac{4-3z}{(z^2-z)'}\right|_{z=1} = 2\pi i \left.\frac{4-3z}{2z-1}\right|_{z=1} = 2\pi i \frac{4-3(1)}{2(1)-1} = 2\pi i$$

亦即 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 1}$，故亦可得出相同結果。

方法三 利用單極點之另一個殘值計算公式 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)]}$ 求解，條件為：z_0 為 C 內之單極點。

由以上公式知：

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}dz = 2\pi i \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{4-3z}{z(z-1)}\right] = 2\pi i \lim_{z\to 1}\frac{4-3z}{z} = 2\pi i \frac{4-3(1)}{1} = 2\pi i$$

亦即 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 1}$，故以此方式求解亦可得出相同結果。

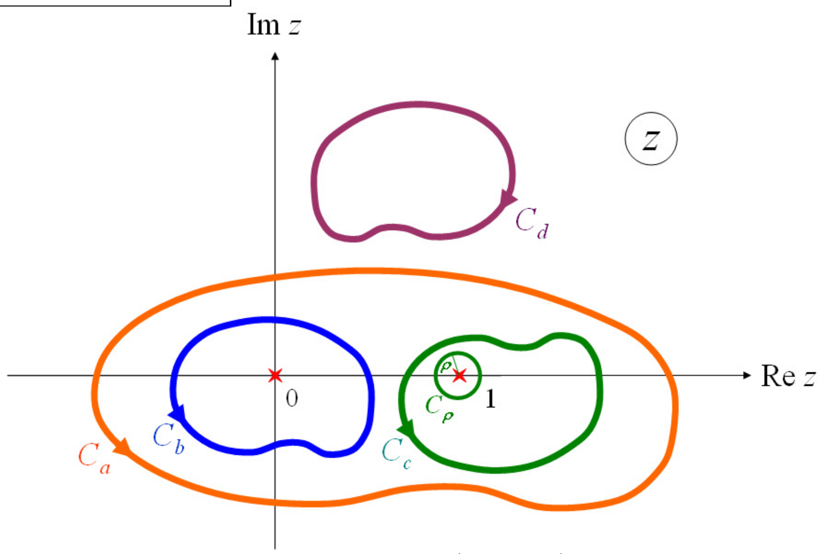
方法四 利用 $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2\pi i a_{-1}}$ 求解，其中 a_{-1} 為勞倫級數展開後 $\frac{1}{z-z_0}$ 項次所對應之係數。其應滿足之條件為：z_0 為 C 內之極點。

函數 $f(z)=\dfrac{4-3z}{z^2-z}$ 需以 $z=1$ 為中心點作 Laurent 級數展開，其關係式如下：

$$
\begin{aligned}
f(z)&=\frac{4-3z}{z^2-z}\\
&=\frac{4-3z}{z(z-1)}\\
&=\frac{4-3z}{z-1}\times\frac{1}{z}\\
&=\frac{4-3(z-1+1)}{z-1}\times\frac{1}{z-1+1}\\
&=\frac{1-3(z-1)}{z-1}\times\frac{1}{1-[-(z-1)]}\\
&=\left(\frac{1}{z-1}-3\right)\times\left[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots\right]\\
&=\left[\frac{1}{z-1}-1+(z-1)-(z-1)^2+-\cdots\right]+\left[-3+3(z-1)-3(z-1)^2+3(z-1)^3-+\cdots\right]\\
&=\frac{1}{z-1}-4+4(z-1)-4(z-1)^2+-\cdots
\end{aligned}
$$

由上式可知，$\dfrac{1}{z-1}$ 項次所對應之係數 a_{-1} 為1，因 $a_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$，故 $\boxed{\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=1}$。

方法五　直接沿著積分曲線作線積分，配合對等路線積分的觀念。其應滿足之條件為：$\boxed{z_0\text{ 為 }C\text{ 內之單極點。}}$



圖三　封閉積分曲線 C_ρ 可表為 $z=\lim\limits_{\rho\to 0}\left(1+\rho e^{i\theta}\right)$、$0\le\theta<2\pi$ 、 $\rho=$半徑

由對等路線積分的觀念知，可將包含$z=1$之積分曲線改換為如圖三所示之線積分，亦即 $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} f(z)dz$ ，其中封閉積分曲線 C_ρ 可表為 $z=\lim_{\rho\to 0}\left(1+\rho e^{i\theta}\right)$ 、$0\le\theta<2\pi$ 、 $\rho=$半徑，故：

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} f(z)dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} \frac{4-3z}{z^2-z}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{4-3(1+\rho e^{i\theta})}{(1+\rho e^{i\theta})^2-(1+\rho e^{i\theta})} d(1+\rho e^{i\theta})\Bigg|_{\rho\to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{4-3(1+\rho e^{i\theta})}{1+2\rho e^{i\theta}+(\rho e^{i\theta})^2-(1+\rho e^{i\theta})} (i\rho e^{i\theta} d\theta)\Bigg|_{\rho\to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1-3\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}+(\rho e^{i\theta})^2} (i\rho e^{i\theta} d\theta)\Bigg|_{\rho\to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1-3\rho e^{i\theta}}{1+\rho e^{i\theta}} (i d\theta)\Bigg|_{\rho\to 0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{1-0}{1+0} (i d\theta) \\
&= \frac{1}{2\pi i}(2\pi i) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

由以上研討知，所得結果再次相同。

根據以上之解析，以下便可討論出沿著封閉積分曲線 C_a、C_b、C_c、C_d 之線積分值，分述如下：

(a) 沿著封閉曲線 C_a 作線積分

因單極點 $z=0$ 與 $z=1$ 均落在封閉積分曲線 C_a 之內部，故由殘值定理知：

$$\boxed{\oint_{C_a} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i(-4) + 2\pi i(1) = -6\pi i}$$

(b) 沿著封閉曲線 C_b 作線積分

因封閉積分曲線 C_b 之內部僅包含一個單極點 $z=0$，故由殘值定理知：

$$\boxed{\oint_{C_b} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i(-4) = -8\pi i}$$

(c) 沿著封閉曲線 C_c 作線積分

因封閉積分曲線 C_c 之內部僅包含一個單極點 $z=1$，故由殘值定理知：

$$\boxed{\oint_{C_c} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 2\pi i(1) = 2\pi i}$$

(d) 沿著封閉曲線 C_d 作線積分

因封閉積分曲線 C_d 之內部並未包含任何奇異點，故由 Cauchy 積分定理知：

$$\boxed{\oint_{C_d} f(z)dz = 0}$$