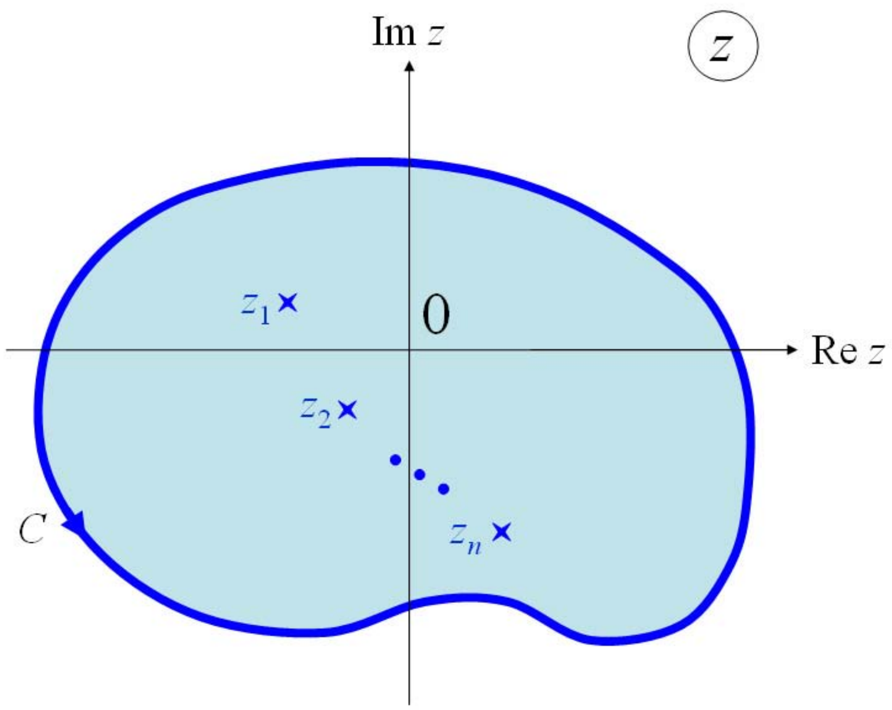
提要 362：殘值定理(Residue Theorem)

殘值定理(Residue Theorem)亦常被譯為留數定理，讀者應熟悉這些不同的翻譯名詞。以下說明此一定理之內涵：

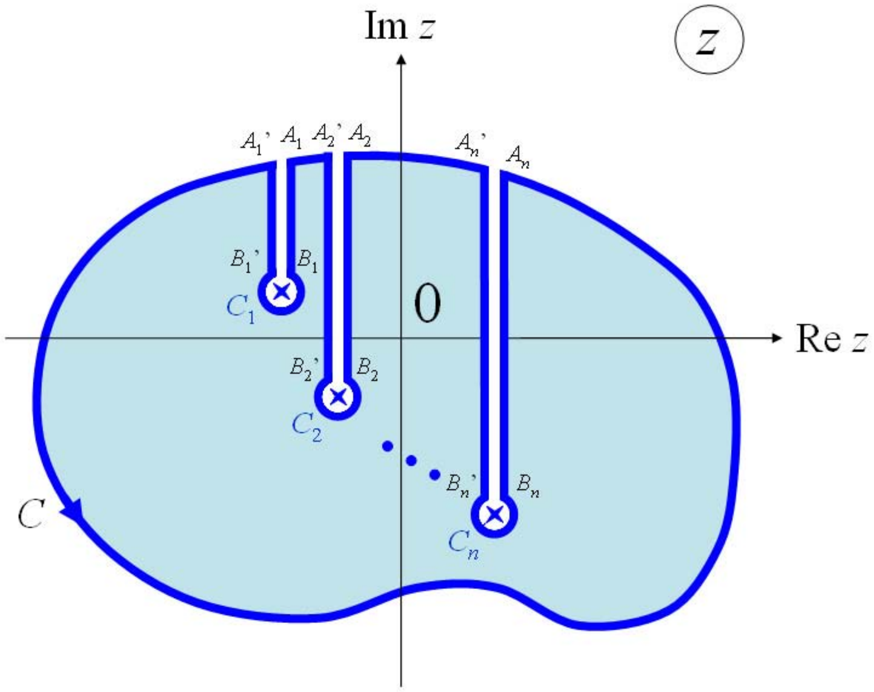
殘值定理(Residue Theorem)
若積分曲線 C 內有 n 個奇異點(Singular Point) z_1、z_2、…、z_n， 則 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \underset{z=z_j}{\mathrm{Res}}\, f(z)$，其中曲線 C 之積分方向為逆鐘向。

【證明】

由 Cauchy 積分定理知，$\oint_C f(z)dz = 0$，其需滿足之條件為：$\boxed{f(z)\text{在}C\text{上及}C\text{內均是解析函數。}}$今再考慮如圖一所示之積分，其中包含 n 個不可解析點 z_1、z_2、⋯、z_n。



圖一　包含 n 個不可解析點之封閉路線積分



圖二　上圖中淺藍色部分所示之定義域中並無不可解析點

在圖二中，淺藍色部分所示之定義域中並無不可解析點，此一情況符合 Cauchy 積分定理之條件，故圖二所示之封閉曲線的線積分可由 Cauchy 積分定理知其封閉曲線之積分值為零，亦即：

$$\begin{aligned}&\oint_{C逆} f(z)dz+\oint_{C_1順} f(z)dz+\oint_{C_2順} f(z)dz+\cdots+\oint_{C_n順} f(z)dz\\&\quad+\int_{A_1}^{B_1} f(z)dz+\int_{B_1'}^{A_1'} f(z)dz+\int_{A_2}^{B_2} f(z)dz+\int_{B_2'}^{A_2'} f(z)dz+\cdots+\int_{A_n}^{B_n} f(z)dz+\int_{B_n'}^{A_n'} f(z)dz=0\end{aligned}\tag{1}$$

其中「順」表順鐘向作積分，「逆」表逆鐘向作積分；且 $\int_{A_1}^{B_1} f(z)dz+\int_{B_1'}^{A_1'} f(z)dz=0$ 、$\int_{A_2}^{B_2} f(z)dz+\int_{B_2'}^{A_2'} f(z)dz=0$ 、…、$\int_{A_n}^{B_n} f(z)dz+\int_{B_n'}^{A_n'} f(z)dz=0$。故式(1)可改寫為：

$$\oint_{C逆} f(z)dz+\oint_{C_1順} f(z)dz+\oint_{C_2順} f(z)dz+\cdots+\oint_{C_n順} f(z)dz=0\tag{2}$$

將上式中之「順鐘向積分」改寫為「逆鐘向積分」，則上式可進一步化簡為：

$$\oint_{C逆} f(z)dz = \oint_{C_1逆} f(z)dz + \oint_{C_2逆} f(z)dz + \cdots + \oint_{C_n逆} f(z)dz \tag{3}$$

由 Laurent 級數展開之關係式知，其中沿曲線$C_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$之線積分 $\oint_{C_i逆} f(z)dz$ 的積分值為：

$$\oint_{C_i逆} f(z)dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z) \tag{4}$$

基於此，式(3)可改寫為：

$$\boxed{\oint_{C逆} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \cdots + 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)} \tag{5}$$

故得證。