提要 361：殘值積分（Residue Integration）

讀者應瞭解，我們的重要目標是希望找出積分式 $\oint_C f(z)\,dz$ 之積分值，以下說明各種可能的解法。

第一個重要的殘值積分公式
$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ 條件：❶ a_{-1} 為勞倫級數展開後 $\dfrac{1}{z-z_0}$ 項次所對應之係數；❷ z_0 為落在封閉積分曲線 C 內之極點。

【證明】

由勞倫級數展開的觀念知，函數 $f(z)$ 之勞倫級數展開可表為：

$$f(z)=\cdots+\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots$$

其中 $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ 。當 $n=-1$ 時：

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{-1+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$$

由此可知：

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i a_{-1}$$

故得證。

第二個重要的殘值積分公式

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]$$

條件：z_0 為落在封閉積分曲線 C 內之單極點。

【證明】

由勞倫級數展開的觀念知，若 z_0 為落在封閉積分曲線 C 內之單極點，則函數 $f(z)$ 之勞倫級數展開可表為：

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots$$

故：

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]&=\lim_{z\to z_0}\left\{(z-z_0)\left[\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots\right]\right\}\\&=\lim_{z\to z_0}\left\{a_{-1}+a_0(z-z_0)+a_1(z-z_0)^2+\cdots\right\}\\&=a_{-1}\end{aligned}$$

已知 $\oint_C f(z)\,dz=2\pi i a_{-1}$，所以：

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]$$

故得證。