提要 359：極點（Poles）

極點（Poles）就是奇異點（Singularity），相關的觀念很重要，因為牽涉到殘值定理（Residue Theorem）的應用。

定義：m 階極點（Pole of m^{th} Order）

若函數 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 並非解析，但函數 $(z-z_0)^m f(z)$ 在 $z=z_0$ 是解析的，則 $z=z_0$ 為函數 $f(z)$ 之 m 階極點（Pole of m^{th} Order）。若 $m=1$，則此一階極點又稱為單極點（Single Pole）。

【附註】

1. 若在奇異點 z_0 鄰近沒有其他的點使得函數 $f(z)$ 成非解析，則點 z_0 稱為孤立奇異點（Isolated Singularity）。

2. 若 $z=z_0$ 為函數 $f(z)$ 之 m 階極點，則以點 $z=z_0$ 為中心點作勞倫級數展開時，其勞倫級數之首項為 $\dfrac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}$，亦即勞倫級數之型式為：

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\cdots \tag{1}$$

3. 式(1)中之 $\dfrac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}+\dfrac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\dfrac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+\dfrac{a_{-1}}{z-z_0}$ 部分，稱為勞倫級數之主要部分（Principal Part）。

4. 若主要部分（Principal Part）有無限多項相加，則此一極點 $z=z_0$ 稱為**本質奇異點（Essential Singularity）**。