

提要 357：勞倫級數(Laurent Series)之應用(1)

茲以一例說明勞倫級數 (Laurent Series) 之應用。

範例一

試以 $z = \sqrt{2} - 1$ 為中心點，將函數 $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1}$ 作勞倫級數展開。

【解答】

本題應引用幾何級數展開的觀念求解。由題意知，需以 $\sqrt{2} - 1$ 為中心點作勞倫級數展開，故：

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1} \\ &= \frac{1}{[z - (\sqrt{2} - 1)][z - (\sqrt{2} + 1)]} \\ &= \frac{1}{z - (\sqrt{2} - 1)} \cdot \frac{1}{z - (\sqrt{2} + 1)} \\ &= \frac{1}{z - (\sqrt{2} - 1)} \cdot \frac{1}{[z - (\sqrt{2} - 1)] - 2} \\ &= \frac{1}{z - (\sqrt{2} - 1)} \cdot \frac{-1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z - (\sqrt{2} - 1)}{2}} \\ &= \frac{1}{z - (\sqrt{2} - 1)} \cdot \frac{-1}{2} \left\{ 1 + \frac{z - (\sqrt{2} - 1)}{2} + \left[\frac{z - (\sqrt{2} - 1)}{2} \right]^2 + \left[\frac{z - (\sqrt{2} - 1)}{2} \right]^3 + \dots \right\} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}}{z - (\sqrt{2} - 1)} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} [z - (\sqrt{2} - 1)] - \frac{1}{16} [z - (\sqrt{2} - 1)]^2 - \dots \end{aligned}$$

以上所示即為問題之解。