

## 提要 355 : Binomial 級數

### Binomial 級數之定義

Binomial 級數係定義為：

$$\frac{1}{(1+z)^m} = 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!} z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} z^3 + \dots$$

#### 【附註】

1. 筆者不覺得這個公式應該背下來，但若讀者有能力記下這個關係式，那也是美事一件！

範例一

試將  $f(z) = \frac{2z^2 + 9z + 5}{z^3 + z^2 - 8z - 12}$  表示成  $(z-1)$  之冪級數型式。

【解答】

解析本問題需引用 Binomial 級數與幾何級數 (Geometric Series) 的觀念，說明如下：

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{2z^2 + 9z + 5}{z^3 + z^2 - 8z - 12} \\
 &= \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{2}{z-3} \\
 &= \frac{1}{[(z-1)+3]^2} + \frac{2}{(z-1)-2} \\
 &= \frac{1}{[3+(z-1)]^2} + \frac{2}{(z-1)-2} \\
 &= \frac{1}{9} \frac{1}{\left[1 + \frac{z-1}{3}\right]^2} + \frac{1}{\frac{z-1}{2} - 1} \\
 &= \frac{1}{9} \frac{1}{\left[1 + \frac{z-1}{3}\right]^2} - \frac{1}{1 - \frac{z-1}{2}} \\
 &= \frac{1}{9} \left\{ 1 - 2 \left(\frac{z-1}{3}\right) + \frac{2(2+1)}{2!} \left(\frac{z-1}{3}\right)^2 - \frac{2(2+1)(2+2)}{3!} \left(\frac{z-1}{3}\right)^3 + \dots \right\} \\
 &\quad - \left\{ 1 + \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{2}\right)^3 + \dots \right\} \\
 &= -\frac{8}{9} - \frac{31}{54}(z-1) - \frac{23}{108}(z-1)^2 - \dots
 \end{aligned}$$

以上所示即為問題之解。