提要 353：基本且重要之泰勒級數（Taylor Series）

以下所示基本函數之泰勒級數應把它們背下來。

基本且重要之泰勒級數（Taylor Series）
1. $\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots$，$\lvert z\rvert<1$。
2. $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^4}{4!}+\cdots$，$z$ 可取任意值。
3. $\cos z=1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}-\dfrac{z^6}{6!}+-\cdots$，$z$ 可取任意值。
4. $\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+-\cdots$，$z$ 可取任意值。
5. $\cosh z=1+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}+\dfrac{z^6}{6!}+\cdots$，$z$ 可取任意值。
6. $\sinh z=z+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\dfrac{z^7}{7!}+\cdots$，$z$ 可取任意值。

【附註】

1. 以上級數展開方式是以點 $z=0$ 為級數之中心點，此種級數還有一個名字，稱為 Maclaurin 級數。

範例一

試證：(a) $\operatorname{Ln}(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-+\cdots$，$|z|<1$。

(b) $-\operatorname{Ln}(1-z)=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots$，$|z|<1$。

(c) $\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}=2\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right)$，$|z|<1$。

【證明】

(a) 因為：

$$\frac{d}{dz}[\operatorname{Ln}(1+z)]=\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=1+(-z)+(-z)^2+(-z)^3+(-z)^4+\cdots$$

所以：

$$\begin{aligned}\int\left\{\frac{d}{dz}[\operatorname{Ln}(1+z)]\right\}dz&=\operatorname{Ln}(1+z)\\&=\int\left[1+(-z)+(-z)^2+(-z)^3+(-z)^4+\cdots\right]dz\\&=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-+\cdots\end{aligned}$$

故得證。

(b) 因為：

$$\frac{d}{dz}\left[-\mathrm{Ln}\left(1-z\right)\right]=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots$$

所以：

$$\begin{aligned}\int\left\{\frac{d}{dz}\left[-\mathrm{Ln}\left(1-z\right)\right]\right\}dz&=-\mathrm{Ln}\left(1-z\right)\\&=\int\left[1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots\right]dz\\&=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}+\cdots\end{aligned}$$

故得證。

(c) 將(a)與(b)之計算結果相加，則：

$$\mathrm{Ln}\left(1+z\right)-\mathrm{Ln}\left(1-z\right)=\left(z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-+\cdots\right)+\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\right)=2\left(z+\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\right)$$

其中等號左邊即為 $\mathrm{Ln}\,\frac{1+z}{1-z}$ ，故得證。