提要 352：泰勒級數（Taylor Series）

泰勒級數（Taylor Series）
複變函數 $f(z)$ 之泰勒級數是定義為： $$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$ 其中係數 $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$、$n=0,1,2,3,\cdots$。

【附註】

1. 複變函數 $f(z)$ 之泰勒級數展開問題常被稱之為**碟子問題（Disc Problem）**，因為其定義域中沒有任何不可解析點，其定義域就像是一個沒有破洞的碟子一樣。數學上的嚴謹講法是函數 $f(z)$ 需在點 z_0 是解析的，否則 $f^{(n)}(z_0)$、$n=0,1,2,3,\cdots$ 無法推求出來，若 $f^{(n)}(z_0)$ 無法推求出來，係數 $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$ 也就算不出來了，那函數 $f(z)$ 之泰勒級數也就不存在了。

2. 根據廣義之 Cauchy 積分公式知 $\oint_C \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\dfrac{2\pi i}{n!}g^{(n)}(z_0)$、$n=0,1,2,3,\cdots$，故 $g^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$。基於此，可知泰勒級數展開所需之係數 $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$ 可表為：

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$