提要 351：冪級數的基本性質

定理一：Continuity of the Sum of a Power Series

若複變函數 $f(z)$ 可以中心點為 z_0 之冪級數展開方式加以表示：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=a_0(z-z_0)+a_1(z-z_0)^2+a_2(z-z_0)^2+a_3(z-z_0)^3+\cdots$$

且其收斂半徑 $R>0$，則複變函數 $f(z)$ 在點 z_0 是連續的。

定理二：Identity Theorem for Power Series. Uniqueness of Representation

若兩冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$、$\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$ 在 $|z-z_0|<R$ 是收斂的，且：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

則必定是其係數對應相等，即 $a_n=b_n$、$n=0,1,2,3,\cdots$。

定理三：Termwise Differentiation of Power Series

冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 微分後是 $\sum_{n=0}^{\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}$，這兩個冪級數之收斂半徑是相同的。

定理四：Termwise Integration of Power Series

冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 積分後是 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$，這兩個冪級數之收斂半徑是相同的。