提要 350：收斂半徑（Radius of Convergence）

收斂半徑（Radius of Convergence）很重要，許多研究所考試也常看到與此類方法相關之考題。其觀念很簡單，亦請讀者留意它。

收斂半徑（Radius of Convergence）
已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0(z-z_0)+a_1(z-z_0)^2+a_2(z-z_0)^2+a_3(z-z_0)^3+\cdots$ 為中心點在 z_0 之冪級數，則其收斂半徑 R 的計算方式為： $$R=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\|$$ 上式亦稱之為 **Cauchy-Hadamard 公式**。

範例一
試證明幾何級數（Geometric Series）$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots$ 之收斂半徑為 1。

【證明】

由收斂半徑之計算方法知：

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right|=1$$

因此幾何級數之收斂半徑確實為 1，故得證。