

提要 348：根試驗法 (Root Test)

根試驗法 (Root Test) 也是檢驗級數是否收斂的好方法，但筆者比較喜歡比例試驗法 (Ratio Test)。

定理：根試驗法 (Root Test)

已知 $z_1 + z_2 + z_3 + \dots$ 為一級數，並考慮 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$ 。

- (a) 若 $L < 1$ ，則 $z_1 + z_2 + z_3 + \dots$ 為收斂級數。
- (b) 若 $L > 1$ ，則 $z_1 + z_2 + z_3 + \dots$ 為發散級數。
- (c) 若 $L = 1$ ，則無法引用根試驗法檢驗級數是否收斂。

範例一

試問級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100+75i)^n}{n!} = 1 + (100+75i) + \frac{1}{2!}(100+75i)^2 + \dots$ 是否收斂？

【解答】

由根試驗法知：

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(100+75i)^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(100+75i)^n}{n!} \right|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|100+75i|}{(n!)^{1/n}} = 0$$

當 $n \rightarrow \infty$ 時，其比值 $L = 0$ ，故此級數收斂。