提要 345：級數之基本定理

級數之基本定理有許多個，本單元擬介紹五個基本定理。

定理一：Sequences of the Real and the Imaginary Parts

若 $z_n = x_n + iy_n \left(n=1,2,3,\cdots\right)$ 之複數數列 $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n, \cdots$ 收斂至 $c = a + ib$，則必定是數列之實部 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 收斂至 a，而數列之虛部 $y_1, y_2, y_3, \cdots$ 收斂至 b。

定理二：Real and Imaginary Parts

若級數 $\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$ 收斂且其和為 $s = u + iv$，則必定是級數之實部 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$ 收斂至 u，而級數之虛部 $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots$ 收斂至 v。

定理三：Convergence

若級數 $\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$ 收斂，則必定是 $\lim_{m\to\infty} z_m = 0$。若 $\lim_{m\to\infty} z_m \neq 0$，則必定是級數 $\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$ 發散。

定理四：Cauchy's Convergence Principle for Series

若級數 $\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$ 為收斂級數，則一定找到一個 N 與 $\varepsilon > 0$，使得 $\left|z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3} + \cdots + z_{n+p}\right| < \varepsilon$，其中 $n > N$，$p = 1, 2, 3, \cdots$。

定理五：Comparison Test

若級數 $b_1+b_2+b_3+\cdots$ 為收斂級數（$b_1, b_2, b_3, \cdots$ 為非負之實數），且 $|z_n| \le b_n (n=1, 2, 3, \cdots)$，則 $z_1+z_2+z_3+\cdots$ 為收斂級數。