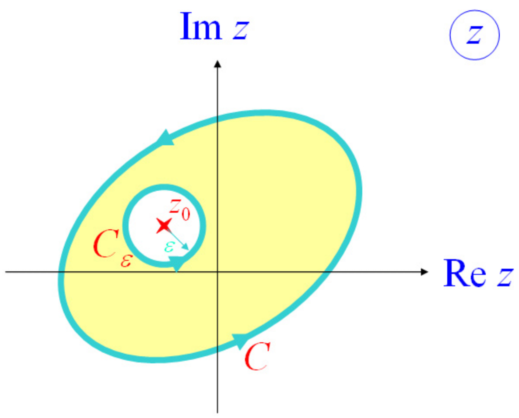
提要 343：廣義之 Cauchy 積分公式(Cauchy's Integral Formula)

本單元擬介紹廣義之**柯西積分公式（Cauchy's Integral Formula）**，在複變分析中其地位非常重要，筆者把它定位為複變分析中之第二個重要觀念。第一個重要的觀念是勞倫級數（Laurent Series）展開觀念，關於勞倫級數，後續單元會詳細加以介紹。

定理：廣義柯西積分公式（Generalized Cauchy's Integral Formula）
$\oint_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}g^{(n)}(z_0)$、$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 條件：❶ z_0 在封閉積分曲線 C 之內部；❷ $g(z)$ 在單閉區間（Simply Connected Domain）中為解析函數（Analytic Function）。（第二個條件也可說成：1. 相對於 $g(z)$ 而言，其定義域為單閉區間；2. $g(z)$ 滿足 Cauchy-Riemann 條件。）

【證明】

如圖一所示，對積分函數 $\frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 而言，在封閉積分曲線 C 之內部有一不可解析點 z_0。



圖一　對積分函數 $\frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ 而言，在封閉積分曲線 C 之內部有一不可解析點 z_0

由函數微分之定義知：

$$
\begin{aligned}
g'(z_0) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{g(z_0+\Delta z)-g(z_0)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left[g(z_0+\Delta z)-g(z_0)\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

由柯西積分公式（Cauchy Integral Formula）$\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i g(z_0)$知，式(1)中之$g(z_0)$與$g(z_0+\Delta z)$可分別表為：

$$
g(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{g(z)}{z-z_0}dz \text{ 、 } g(z_0+\Delta z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{g(z)}{z-(z_0+\Delta z)}dz \tag{2}
$$

將式(2)代入式(1)可得：

$$
\begin{aligned}
g'(z_0) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left[g(z_0+\Delta z)-g(z_0)\right] \\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{g(z)}{z-(z_0+\Delta z)}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{g(z)}{z-z_0}dz\right] \\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_C\left[\frac{g(z)}{z-(z_0+\Delta z)}-\frac{g(z)}{z-z_0}\right]dz\right\} \\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_C g(z)\left[\frac{1}{z-(z_0+\Delta z)}-\frac{1}{z-z_0}\right]dz\right\} \\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_C g(z)\frac{(z-z_0)-[z-(z_0+\Delta z)]}{[z-(z_0+\Delta z)](z-z_0)}dz\right\} \\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_C g(z)\frac{\Delta z}{[z-(z_0+\Delta z)](z-z_0)}dz\right\} \\
&= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_C g(z)\frac{1}{[z-(z_0+\Delta z)](z-z_0)}dz\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_C g(z)\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{[z-(z_0+\Delta z)](z-z_0)}dz\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left\{\oint_C g(z)\frac{1}{(z-z_0)(z-z_0)}dz\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{g(z)}{(z-z_0)^2}dz
\end{aligned}
$$

利用數學歸納法可同理證出：

$$g''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^3}\,dz$$

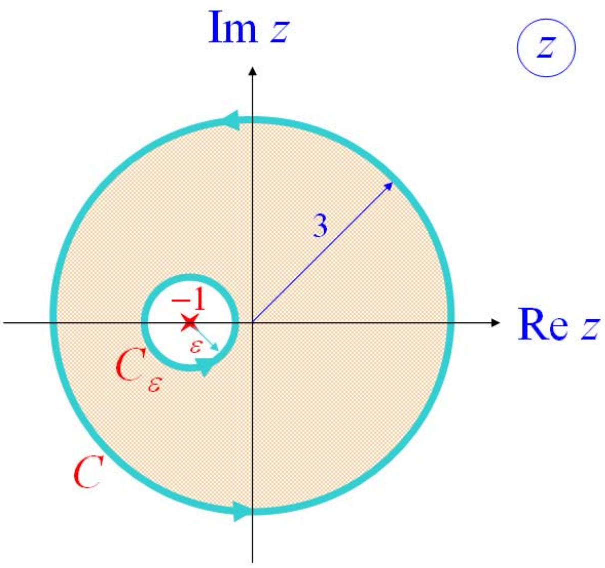
$$g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

故得證。

範例一
試解析$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$，其中逆鐘向積分之封閉積分曲線 C 為$\lvert z\rvert=3$。

【解答】

由題意知，問題之封閉積分曲線如圖二所示，其中包含不可解析點（奇異點）$z=-1$：



圖二　封閉積分曲線 C 包含奇異點 $z=-1$

可直接引用廣義柯西積分公式 $g^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ 推求其解，亦即：

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz &= \frac{2\pi i}{3!}\frac{d^3(e^{2z})}{dz^3}\bigg|_{z=-1} \\ &= \frac{\pi i}{3}(8e^{2z})\Big|_{z=-1} \\ &= \frac{\pi i}{3}(8e^{-2}) \\ &= \frac{8\pi e^{-2} i}{3}\end{aligned}$$

以上即為問題之解。