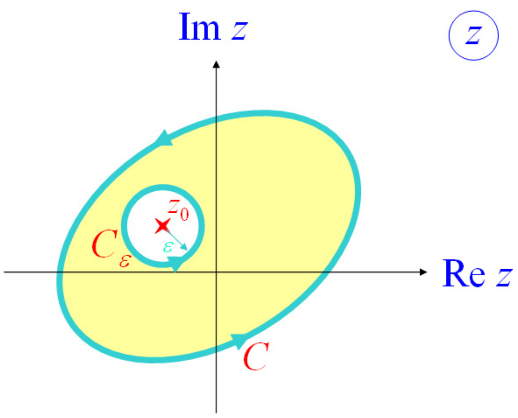
提要 342：狹義之 Cauchy 積分公式(Cauchy's Integral Formula)

柯西積分公式（Cauchy's Integral Formula）在複變分析中之地位非常重要，筆者把它定位為複變分析中之第二個重要觀念。第一個重要的觀念是勞倫級數（Laurent Series）展開觀念，後續單元會詳細加以介紹。

定理：柯西積分公式（Cauchy's Integral Formula）
$$\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i g(z_0)$$ 條件：❶ z_0 在封閉積分曲線 C 之內部；❷ $g(z)$ 在單閉區間（Simply Connected Domain）中為解析函數（Analytic Function）。（第二個條件也可說成：1. 相對於 $g(z)$ 而言，其定義域為單閉區間；2. $g(z)$ 滿足 Cauchy-Riemann 條件。）

【證明】

如圖一所示，對積分函數 $\frac{g(z)}{z-z_0}$ 而言，在封閉積分曲線 C 之內部有一不可解析點 z_0。



圖一　對積分函數 $\frac{g(z)}{z-z_0}$ 而言，在封閉積分曲線 C 之內部有一不可解析點 z_0

又由對等路線積分的觀念知，在移動積分曲線時，只要沒有任何不可解析點落到積分曲線之外面，則可調整封閉積分曲線之積分位置。基於此可知，沿著封閉積分曲線 C 之積分可調整為沿著封閉積分曲線 C_ε 的積分，其中 $\varepsilon \to 0$。亦即：

$$\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{C_\varepsilon}\frac{g(z)}{z-z_0}dz \tag{1}$$

其中封閉積分曲線C_ε是一個半徑為ε圓心在z_0的圓，此圓可表為：

$$z-z_0=\varepsilon e^{i\theta} \text{、} 0\le\theta<2\pi \tag{2}$$

將式(2)代入式(1)，則式(1)可改寫為：

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{g(z)}{z-z_0}dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{C_\varepsilon}\frac{g(z)}{z-z_0}dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{g\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right)}{\varepsilon e^{i\theta}}d\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{g\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right)}{\varepsilon e^{i\theta}}\left(i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} g\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right)(id\theta) \\
&= \int_0^{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[g\left(z_0+\varepsilon e^{i\theta}\right)(id\theta)\right] \\
&= \int_0^{2\pi} g(z_0)(id\theta) \\
&= g(z_0)\int_0^{2\pi} id\theta \\
&= 2\pi i g(z_0)
\end{aligned}$$

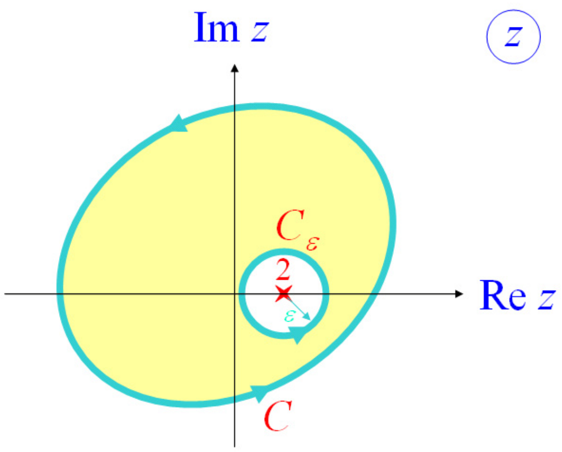
故得證。

範例一

試解析 $\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz$，其中逆鐘向積分之封閉積分曲線 C 包含點 $z=2$。

【解答】

由題意知，問題之封閉積分曲線如圖二所示：



圖二　封閉積分曲線 C 包含奇異點 $z=2$

讀者可直接引用柯西積分公式推求其解，或是像之前的柯西積分公式之證明過程一樣逐步推求其解，筆者擬逐步推求其解。

由對等路線積分的觀念知，沿著封閉積分曲線 C 之積分可調整為沿著封閉積分曲線 C_ε 的積分，其中 $\varepsilon \to 0$。亦即：

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2}dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{C_\varepsilon} \frac{e^z}{z-2}dz \qquad (3)$$

其中封閉積分曲線 C_ε 是一個半徑為 ε 圓心在 $z=2$ 的圓，此圓可表為：

$$z-2=\varepsilon e^{i\theta} \text{、} 0 \le \theta < 2\pi \qquad (4)$$

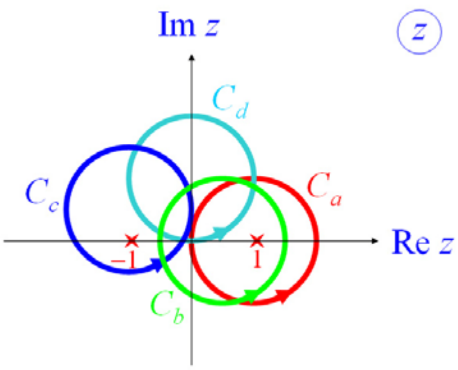
將式(4)代入式(3)，則式(3)可改寫為：

$$
\begin{aligned}
\oint_C \frac{e^z}{z-2}\,dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\oint_{C_\varepsilon}\frac{e^z}{z-2}\,dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{2+\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}\,d\left(2+\varepsilon e^{i\theta}\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{2+\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}}\left(i\varepsilon e^{i\theta}d\theta\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} e^{2+\varepsilon e^{i\theta}}\left(id\theta\right) \\
&= \int_0^{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[e^{2+\varepsilon e^{i\theta}}\left(id\theta\right)\right] \\
&= \int_0^{2\pi} e^2\left(id\theta\right) \\
&= e^2\int_0^{2\pi} id\theta \\
&= 2\pi i e^2
\end{aligned}
$$

以上即為問題之解。

範例二

試解析 $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz$，其中逆鐘向積分之封閉積分曲線 C 為圖三所示半徑為 1 之四種圓。



圖三　四種封閉積分曲線 C 之示意圖

【解答】

本題擬直接引用柯西積分公式推求其解。

■ 沿 C_a 之積分值

因 C_a 中包含奇異點 $z=1$，所以根據柯西積分公式知：

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \oint_C \frac{\frac{z^2+1}{z+1}}{z-1}dz = 2\pi i \left.\frac{z^2+1}{z+1}\right|_{z=1} = 2\pi i \frac{(1)^2+1}{(1)+1} = 2\pi i$$

■ 沿 C_b 之積分值

同理，因 C_b 中包含奇異點 $z=1$，所以根據柯西積分公式知：

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \oint_C \frac{\frac{z^2+1}{z+1}}{z-1}dz = 2\pi i \left.\frac{z^2+1}{z+1}\right|_{z=1} = 2\pi i \frac{(1)^2+1}{(1)+1} = 2\pi i$$

■ 沿 C_c 之積分值

因 C_c 中包含奇異點 $z=-1$，所以根據柯西積分公式知：

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = \oint_C \frac{\frac{z^2+1}{z-1}}{z+1}dz = 2\pi i \frac{z^2+1}{z-1}\bigg|_{z=1} = 2\pi i \frac{(-1)^2+1}{(-1)-1} = -2\pi i$$

■ 沿 C_d 之積分值

因 C_d 中不包含任何奇異點，所以可引用**柯西積分定理（Cauchy's Integral Theorem）**推求出其解為零：

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2-1}dz = 0$$