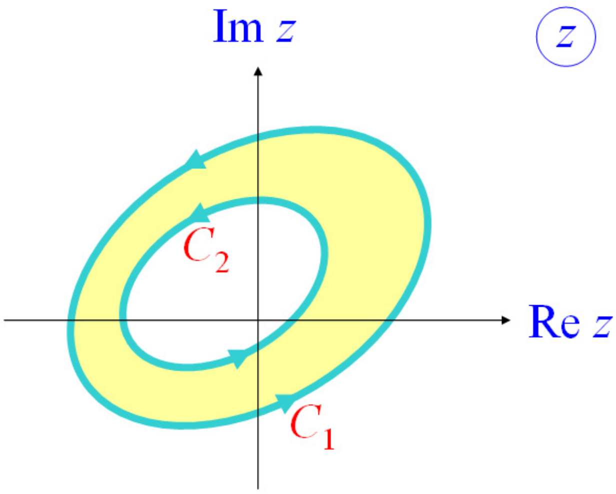
# 提要 340：對等路線積分觀念

**定理：對等路線積分**

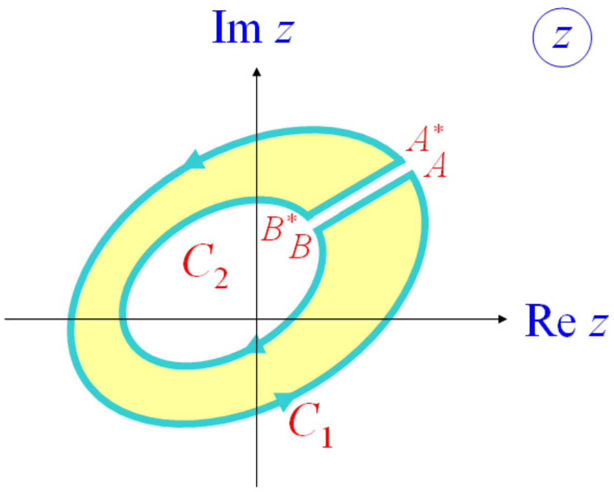
如圖一所示，若 $C_1$ 與 $C_2$ 為在定義域（Domain）中之兩個封閉積分路徑，只要在這兩個封閉積分路徑內有等量之奇異點（Singular Point），則：

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$




圖一　$C_1$ 與 $C_2$ 這兩個封閉積分路徑內有等量之奇異點

【證明】




圖二　選取符合 Cauchy 積分定理之封閉積分路徑

茲選取如圖二所示之封閉積分路徑。由圖二知，在所考慮之封閉積分路徑內並無任何奇異點存在；又由題意知，函數 $f(z)$在黃色區域內都是解析函數。基於此，可引用 Cauchy 積分定理推求出圖二所示沿封閉積分路徑之積分值：

$$\int_{C_1\text{逆}} f(z)\,dz+\int_{A}^{B} f(z)\,dz+\int_{C_2\text{順}} f(z)\,dz+\int_{B^*}^{A^*} f(z)\,dz=0 \tag{1}$$

其中 $\int_{A}^{B} f(z)\,dz+\int_{B^*}^{A^*} f(z)\,dz=0$，因為點 $A$ 與點 $A^*$ 很靠近，點 $B$ 與點 $B^*$ 很靠近，且其積分方向相反；此外，『順』表順鐘向、『逆』表逆鐘向。基於此，式(1)可改寫為：

$$\oint_{C_1\text{逆}} f(z)\,dz+\oint_{C_2\text{順}} f(z)\,dz=0 \tag{2}$$

由式(2)知：

$$\oint_{C_1\text{逆}} f(z)\,dz=-\oint_{C_2\text{順}} f(z)\,dz \tag{3}$$

上式可再調整其積分方向，使得：

$$\boxed{\oint_{C_1\text{逆}} f(z)\,dz=\oint_{C_2\text{逆}} f(z)\,dz} \tag{4}$$

故得證。

【附註】對等路線積分的條件為：**移動封閉積分曲線時不可越過不可解析點。**