提要 339：與積分路徑無關之情況

定理：與積分路徑無關（Independence of Path）

若 $f(z)$ 在**單閉區間（Simply Connected Domain）**內為**解析函數（Analytic Function）**，（亦即：❶定義域為單閉區間。❷ $f(z)$ 符合 Cauchy-Riemann 條件。）則：

$$\int_A^B f(z)\,dz$$

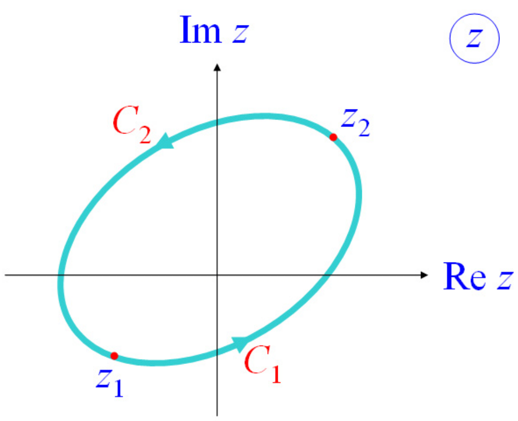
與積分路徑無關。

【證明】

因為 $f(z)$ 在單閉區間（Simply Connected Domain）內為解析函數（Analytic Function），所以：

$$\oint_C f(z)\,dz = 0 \tag{1}$$

其中封閉積分路徑 C 如圖一所示。



圖一　封閉積分路徑 $C = C_1 + C_2$

由圖一知 $C = C_1 + C_2$，故式(1)可改寫為：

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = 0 \tag{2}$$

或

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz + \int_{z_2}^{z_1} f(z)\,dz = 0 \tag{3}$$

式(2)與式(3)移項後可知：

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = -\int_{C_2} f(z)\,dz \quad \text{或} \quad \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = -\int_{z_2}^{z_1} f(z)\,dz \tag{4}$$

亦即：

$$\boxed{\underbrace{\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz}_{\text{沿}C_1} = \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz}_{\text{沿}C_2}} \tag{5}$$

故得證。