提要338：Cauchy 積分定理

Cauchy 積分定理
$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$ 條件：$f(z)$在**單閉區間（Simply Connected Domain）**內為**解析函數（Analytic Function）**。亦即：❶定義域為單閉區間。❷ $f(z)$符合 Cauchy-Riemann 條件。

【證明】

因為：

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u+iv)\,d(x+iy) = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \tag{1}$$

又已知 $f(z)$在單閉區間內為解析函數，所以：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{、} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

由式(2)知，存在ϕ與φ，使得：

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial y} \text{、} v = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{；} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{、} v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{3}$$

將式(3)代入式(1)，則：

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \\
&= \int_C \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx - \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dy\right] + i\int_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy\right) \\
&= \int_C d\varphi + i\int_C d\phi \\
&= \varphi + i\phi\Big|_{z_0}^{z_1} \\
&= [\varphi(z_1) + i\phi(z_1)] - [\varphi(z_0) + i\phi(z_0)]
\end{aligned}$$

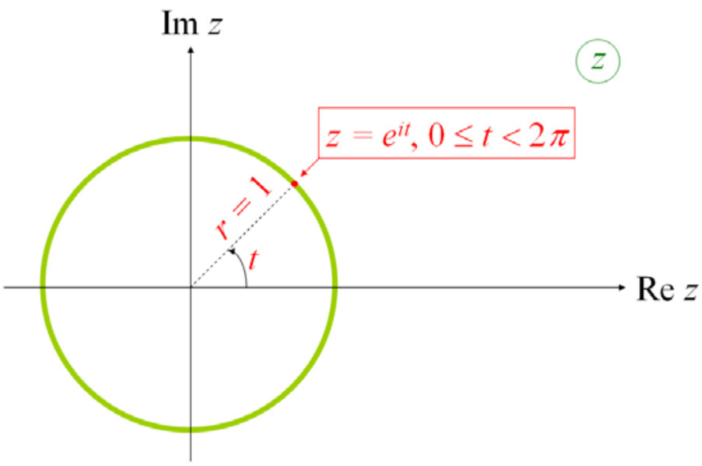
其中點 z_0 與點 z_1 係重合情況，因此$\int_C f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz = 0$，故得證。

範例一

下列那些積分式可以引用 Cauchy 積分定理計算其積分值？

1. $\oint_C \bar{z}dz$ 、C 為單位圓。
2. $\oint_C \frac{dz}{z^2}$ 、C 為單位圓。
3. $\oint_C \frac{dz}{z}$ 、C 為單位圓。
4. $\oint_C \sec z\, dz$ 、C 為單位圓。
5. $\oint_C \frac{dz}{z^2+4}$ 、C 為單位圓。

【解答】



圖一　單位圓示意圖

已知單位圓如圖一所示。若欲引用 Cauchy 積分定理，則積分函數在單位圓上及單位圓內都必須是解析函數。基於此，可知：

1. $\oint_C \bar{z} dz$ 、C 為單位圓 -- Cauchy 積分定理不適用。【原因】因為 $\bar{z}$ 並不滿足 Cauchy-Riemann 條件，所以 Cauchy 積分定理不適用。

2. $\oint_C \frac{dz}{z^2}$ 、C 為單位圓 -- Cauchy 積分定理不適用。【原因】因為 $\frac{1}{z^2}$ 在單位圓內有一奇異點 $z=0$，所以 Cauchy 積分定理不適用。

3. $\oint_C \frac{dz}{z}$ 、C 為單位圓 -- Cauchy 積分定理不適用。【原因】因為 $\frac{1}{z}$ 在單位圓內有一奇異點 $z=0$，所以 Cauchy 積分定理不適用。

4. $\oint_C \sec z \, dz$ 、C 為單位圓 -- Cauchy 積分定理可適用。【原因】因為 $\sec z$ 在單位圓上及單位圓內為解析函數，所以 $\oint_C \sec z \, dz = 0$ 。

5. $\oint_C \frac{dz}{z^2+4}$ 、C 為單位圓 -- Cauchy 積分定理可適用。【原因】因為 $\frac{1}{z^2+4}$ 在單位圓上及單位圓內為解析函數，所以 $\oint_C \frac{dz}{z^2+4} = 0$ 。