提要 337：ML 定理

ML 定理
$$\left\|\int_C f(z)\,dz\right\| \le ML$$ 其中：❶ L 為積分曲線 C 之長度。 ❷ $\|f(z)\| \le M$ 。

【證明】

因為 $|f(z)| \le M$ ，且 L 為積分曲線 C 之長度，所以：

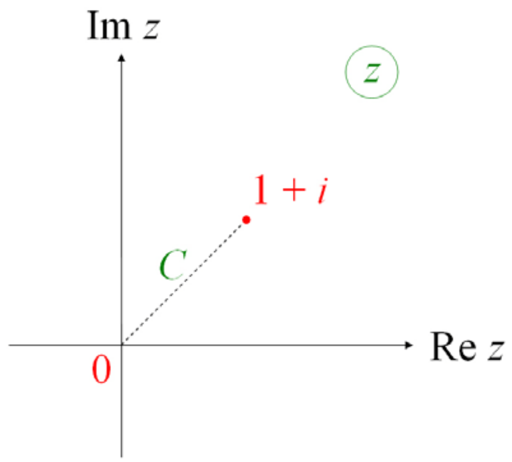
$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,|dz| \le \int_C M\,|dz| = M\int_C |dz| = ML$$

故得證。

範例一

試推求積分式 $\int_C z^2 dz$ 之一個**上界(Upper Bound)**，其中積分曲線 C 為 0 至 $1+i$ 的直線。

【解答】



圖一　積分曲線 C 示意圖

積分曲線 C 之長度 L 為:

$$L = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

又函數 $f(z)$ 之絕對值的最大值為：

$$|f(z)| \le \left|(1+i)^2\right| = \left|\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^2\right| = 2$$

故 $\int_C z^2 dz$ 之上限可表為：

$$\left|\int_C z^2 dz\right| \le 2\sqrt{2} = 2.8284$$

2.8284 即為問題之一個上界。