提要 336：線積分之第二個方法 -- 直接對積分曲線 C 作積分

複數函數之線積分有很多方法，本單元將介紹第二種線積分的方法。

線積分之第二個方法 – Use of Representation of the Path
$$\int_C f(z)\,dz = \int_C f[z(t)]\frac{dz}{dt}dt$$ 條件：❶ $f(z)$在積分曲線 C 上為連續函數。 ❷ 可以找到一個參數 t，將積分曲線 C 表為 $z = z(t)$。

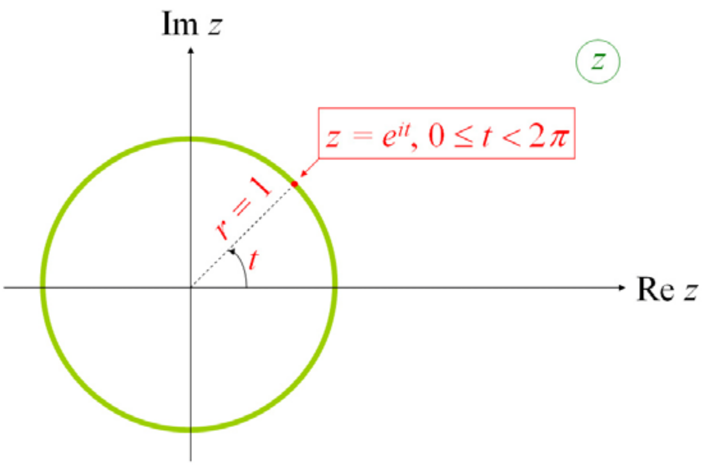
【附註】

1. 筆者較喜歡此一解析方法，因可免去公式之背誦。
2. 尚有許多其他解析方法可推求出積分式之積分值，後面會陸續加以介紹。

範例一

試推求積分式 $\oint_C \frac{1}{z}\,dz$ 之積分值，其中積分曲線 C 為**單位圓（Unit Circle）**。

【解答】



圖一　單位圓示意圖

因為積分曲線 C 為如圖一所示之單位圓，故可以引用參數 t 將單位圓表為:

$$z = e^{it} \text{、} 0 \le t < 2\pi$$

基於此，原積分式可推求出其積分值為 $2\pi i$：

$$\boxed{\oint_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\,de^{it} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\left(ie^{it}\,dt\right) = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i}$$