提要 335：線積分之第一個方法 -- 直接進行積分再代入上下限

複數函數之線積分有很多方法，本單元及下一單元將介紹兩種較直接之線積分方法。

線積分之第一個方法 -- Indefinite Integration of Analytic Functions
$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0)$$ 條件：❶ $f(z)$在單閉區間中為解析函數。 ❷ $F'(z) = f(z)$。

範例一

試推求積分式 $\int_{0}^{1+i} z^2 dz$ 、 $\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z\, dz$ 、 $\int_{8+\pi i}^{8-3\pi i} e^{z/2}\, dz$ 之積分值。

【解答】

因為 $f(z)=z^2$ 、 $f(z)=\cos z$ 、 $f(z)=e^{z/2}$ 在複數平面上之每一個點均為解析函數，故這三個待積分之函數的定義域均屬單閉區間。另外，這三個函數之不定積分 $F(z)=\frac{1}{3}z^3$ 、 $F(z)=\sin z$ 、 $F(z)=2e^{z/2}$ 均存在，故可引用前述定理作線積分，如以下所示。

1. $\int_{0}^{1+i} z^2 dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_{0}^{1+i} = \frac{1}{3}\left[(1+i)^3-0^3\right] = \frac{1}{3}\left(1+3i+3i^2+i^3\right) = \frac{1}{3}(1+3i-3-i) = \frac{1}{3}(-2+2i)$

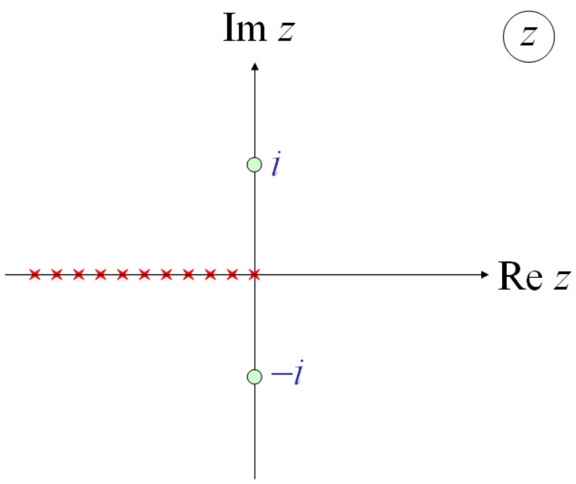
2. $\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z\, dz = \sin z\Big|_{-\pi i}^{\pi i} = \sin(\pi i)-\sin(-\pi i) = 2\sin(\pi i) = 2i\sinh\pi = 23.097i$

3.

$$\begin{aligned}
\int_{8+\pi i}^{8-3\pi i} e^{z/2}\, dz &= 2e^{z/2}\Big|_{8+\pi i}^{8-3\pi i} \\
&= 2e^{(8-3\pi i)/2} - 2e^{(8+\pi i)/2} \\
&= 2e^{4-\frac{3\pi}{2}i} - 2e^{4+\frac{\pi}{2}i} \\
&= 2e^4 e^{-\frac{3\pi}{2}i} - 2e^4 e^{\frac{\pi}{2}i} \\
&= 2e^4(i) - 2e^4(i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

範例二

試推求積分式 $\int_{-i}^{i}\frac{1}{z}dz$ 在圖一所示複數平面上之線積分值。



圖一　積分式 $f(z)=1/z$ 之定義域

【解答】

已知 $\int\frac{1}{z}dz=\ln z$，且圖一所示定義域可保證問題之定義域為單閉區間，故問題之解可引用本單元所介紹之積分觀念，亦即：

$$\int_{-i}^{i}\frac{1}{z}dz=\mathrm{Ln}\ z\Big|_{-i}^{i}=\mathrm{Ln}\ i-\mathrm{Ln}(-i)=\mathrm{Ln}\left(e^{i\pi/2}\right)-\mathrm{Ln}\left(e^{-i\pi/2}\right)=i\frac{\pi}{2}-\left(-i\frac{\pi}{2}\right)=i\pi$$

【附註】

1. $\ln z$ 與 $\mathrm{Ln}\ z$ 的意義並不相同，$\mathrm{Ln}\ z$ 是取 z 之**主值（Principal Value）**，亦即：

$$\mathrm{Ln}\ z=\mathrm{Ln}\left(re^{i\theta}\right)=\mathrm{Ln}\ r+\mathrm{Ln}\ e^{i\theta}=\mathrm{Ln}\ r+i\theta$$

但 $\ln z$ 之運算為：

$$\ln z=\ln\left(re^{i(\theta+2n\pi)}\right)=\ln r+\ln e^{i(\theta+2n\pi)}=\ln r+i(\theta+2n\pi)\text{、}n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$