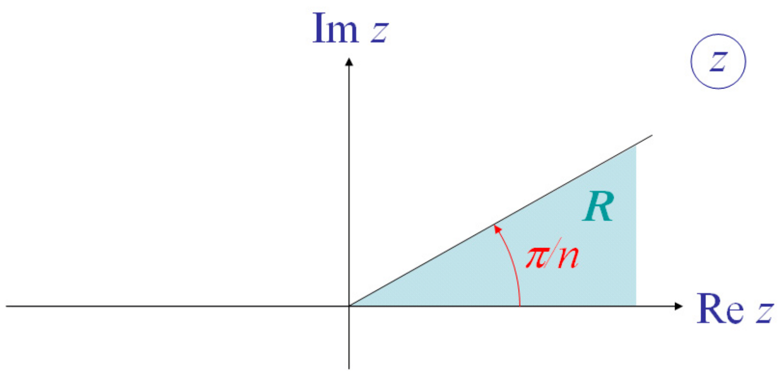
提要 330：保角變換（Conformal Mapping）-- $\omega = z^n$

保角變換（Conformal Mapping）還有許多其他相關內容，茲再以 $\omega = z^n$ 為例加以說明。

範例一
已知 R 為如圖一所示 z 平面上之楔形區域，若令 $\omega = z^n$，試繪出其在 ω 平面上所對應的圖形區域 T。



圖一　z 平面上之楔形區域 R

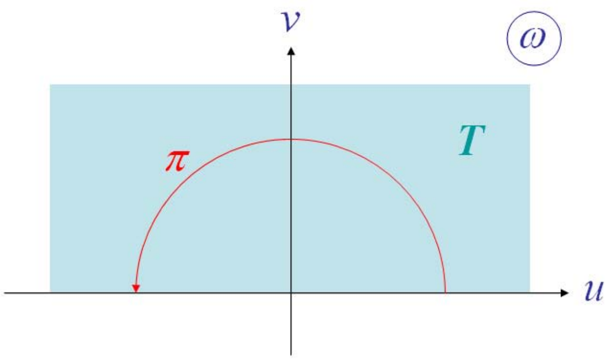
【解答】

因為 $\omega = z^n$，又 $z = re^{i\theta}$，所以 $\omega = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$，亦即這是一種將原圖形之**大小（Magnitude）**作 n 次方之運算，再將其**幅角（Argument）**作 $n\theta$ 角度的運算。

其邊界上之兩條直線可以 $(r,\theta) = (r,0)$ 及 $(r,\theta) = (r,\pi/n)$ 加以表示，當 $\omega = z^n$ 時，其邊界上之兩條直線的對應關係討論如下：

- 當 $(r,\theta) = (r,0)$ 時，$\omega = r^n e^{in\theta} = r^n e^{in(0)}$，即圖二中之水平軸的右半邊直線。
- 當 $(r,\theta) = (r,\pi/n)$ 時，$\omega = r^n e^{in\theta} = r^n e^{in(\pi/n)} = r^n e^{i\pi}$，即圖二中之水平軸的左半邊直線。

基於以上的討論知，在ω平面上，其所對應之圖形區域T為上半平面區域，如圖二所示：



圖二　根據$\omega=z^n$所繪製ω平面上所對應的上半平面區域T