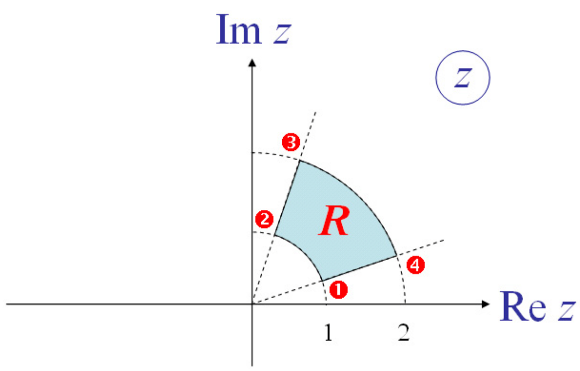
提要 329：保角變換（Conformal Mapping）-- $\omega = z^2$

保角變換（Conformal Mapping）還有許多其他相關內容，擬直接以 $\omega = z^2$ 為例加以說明。

範例一
已知 R 為如圖一所示 z 平面上之扇形區域，若令 $\omega = z^2$，試繪出其在 ω 平面上所對應的圖形區域 T。



圖一　z 平面上之扇形區域 R

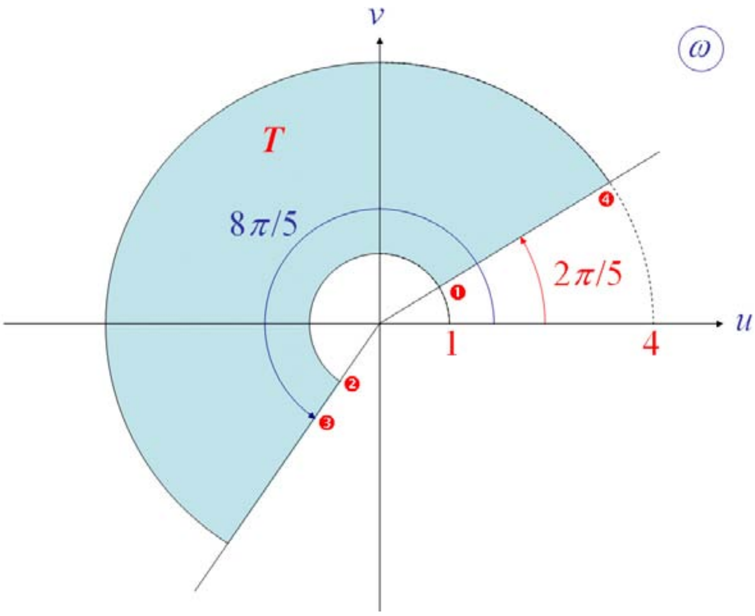
【解答】

因為 $\omega = z^2$，又 $z = re^{i\theta}$，所以 $\omega = \left(re^{i\theta}\right)^2 = r^2 e^{i2\theta}$，亦即這是一種將原圖形之**大小（Magnitude）**作平方之運算，再將其**幅角（Argument）**作 2θ 角度的運算。

其邊界上之四個交會點的 (r,θ) 座標分別為 $(1,\pi/5)$、$(1,4\pi/5)$、$(2,4\pi/5)$、$(2,\pi/5)$。

- 當 $(r,\theta) = (1,\pi/5)$ 時，$\omega = r^2 e^{i2\theta} = (1)^2 e^{i2(\pi/5)} = e^{i(2\pi/5)}$。
- 當 $(r,\theta) = (1,4\pi/5)$ 時，$\omega = r^2 e^{i2\theta} = (1)^2 e^{i2(4\pi/5)} = e^{i(8\pi/5)}$。
- 當 $(r,\theta) = (2,4\pi/5)$ 時，$\omega = r^2 e^{i2\theta} = (2)^2 e^{i2(4\pi/5)} = 4e^{i(8\pi/5)}$。
- 當 $(r,\theta) = (2,\pi/5)$ 時，$\omega = r^2 e^{i2\theta} = (2)^2 e^{i2(\pi/5)} = 4e^{i(2\pi/5)}$。

基於以上的討論，在 ω 平面上，其所對應之區域 T 如圖二所示：



圖二　根據$\omega = z^2$所繪製ω平面上所對應的區域T