提要 326：複數之自然對數

複數 z 之**自然對數（Natural Logarithm）**係指 $\ln z$，此一函數為多值函數，說明如下。因為 $z = re^{i(\theta+2n\pi)}$、$n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$，所以：

$$\begin{aligned}\ln z &= \ln\left[re^{i(\theta+2n\pi)}\right] \\ &= \ln r + \ln\left[e^{i(\theta+2n\pi)}\right] \\ &= \ln r + i(\theta + 2n\pi)\end{aligned} \tag{1}$$

由此可知：當 $n=0$ 時，$\ln z = \ln r + i\theta$；當 $n=1$ 時，$\ln z = \ln r + i(\theta + 2\pi)$；當 $n=2$ 時，$\ln z = \ln r + i(\theta + 4\pi)$；依此類推發現，$z$ 雖是同一個，$\ln z$ 卻有許多個，故 $\ln z$ 為多值函數。因 $\ln z$ 為多值函數，故需定義其**主值（Principal Value）**，$\ln z$ 之主值係表為 $\mathrm{Ln}\ z$，其定義如下：

$$\boxed{\mathrm{Ln}\ z = \ln r + i\theta} \tag{2}$$

或

$$\boxed{\mathrm{Ln}\ z = \ln r + i\mathrm{Arg}\ z} \tag{3}$$

根據式(2)，式(1)可化簡為：

$$\boxed{\begin{aligned}\ln z &= \ln r + i(\theta + 2n\pi) \\ &= \ln r + i\theta + i(2n\pi) \\ &= \mathrm{Ln}\ z + i(2n\pi)\end{aligned}} \tag{4}$$

範例一
試推求i^i之值。

【解答】

此題需引用一些適當的化簡技巧，說明如下：

$$\boxed{\begin{aligned} i^i &= \exp\left[\ln\left(i^i\right)\right] \\ &= \exp(i\ln i) \\ &= \exp\left[i\ln e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right] \\ &= \exp\left\{i\left[i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]\right\} \\ &= \exp\left[-\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right] \end{aligned}}$$

其中 $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$。問題之解的**主值（Principal Value）**為 $i^i = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)$。

範例二
試推求$\ln 4$之值。

【解答】

此題需引用複數之極座標表示法，說明如下：

$$\begin{aligned}\ln 4 &= \ln\left[4e^{i(0+2n\pi)}\right] \\ &= \ln[4] + \ln\left[e^{i(0+2n\pi)}\right] \\ &= \ln 4 + i(2n\pi) \\ &= 1.3863 + i(2n\pi)\end{aligned}$$

其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$。問題之解的**主值（Principal Value）**為 $\mathrm{Ln}\ 4 = 1.3863$。

範例三
試推求$\ln(-1)$之值。

【解答】

此題需引用複數之極座標表示法，說明如下：

$$\begin{aligned}\ln(-1) &= \ln\left[e^{i(\pi+2n\pi)}\right] \\ &= i(\pi + 2n\pi)\end{aligned}$$

其中 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$。問題之解的**主值（Principal Value）**為 $\mathrm{Ln}(-1) = i\pi$。