提要 324：複數之三角函數與雙曲線函數的關係

重要公式整理
1. $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$
2. $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$
3. $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$
4. $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$
5. $\sinh(iz) = i \sin z$
6. $\cosh(iz) = \cos z$
7. $\sin(iz) = i \sinh z$
8. $\cos(iz) = \cosh z$

【證明】

有幾個應用公式需先推導出來。已知：

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \text{ 、 } e^{-iz} = \cos z - i \sin z \tag{1}$$

所以：

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \text{ 、 } \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \tag{2}$$

1. $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ 之證明

由式(2)知：

$$
\begin{aligned}
\cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{ix-y} + e^{-ix+y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-y}\left(\cos x + i\sin x\right) + e^{y}\left(\cos x - i\sin x\right)\right] \\
&= \cos x \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} - i\sin x \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \\
&= \cos x \cosh y - i\sin x \sinh y
\end{aligned}
$$

故得證。

2. $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ 之證明

由式(2)知：

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \\
&= \frac{i}{2i^2}\left[e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}\right] \\
&= -\frac{i}{2}\left(e^{ix-y} - e^{-ix+y}\right) \\
&= -\frac{i}{2}\left(e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix}\right) \\
&= -\frac{i}{2}\left[e^{-y}\left(\cos x + i\sin x\right) - e^{y}\left(\cos x - i\sin x\right)\right] \\
&= i\cos x \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} + \sin x \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} \\
&= i\cos x \sinh y + \sin x \cosh y \\
&= \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y
\end{aligned}
$$

故得證。

3. $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$ 之證明

由雙曲線函數之定義知：

$$\begin{aligned}
\cosh z &= \cosh(x+iy) \\
&= \frac{e^{x+iy}+e^{-(x+iy)}}{2} \\
&= \frac{e^{x}e^{iy}+e^{-x}e^{-iy}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{x}(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)\right] \\
&= \cos y \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} + i\sin y \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \\
&= \cos y \cosh x + i\sin y \sinh x
\end{aligned}$$

故得證。

4. $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$ 之證明

由雙曲線函數之定義知：

$$\begin{aligned}
\sinh z &= \sinh(x+iy) \\
&= \frac{e^{x+iy}-e^{-(x+iy)}}{2} \\
&= \frac{e^{x}e^{iy}-e^{-x}e^{-iy}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{x}(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)\right] \\
&= \cos y \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} + i\sin y \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \\
&= \cos y \sinh x + i\sin y \cosh x
\end{aligned}$$

故得證。

5. $\cosh(iz)=\cos z$ 之證明

由雙曲線函數之定義知：

$$\begin{aligned}\cosh(iz)&=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\&=\frac{1}{2}\left[(\cos z+i\sin z)+(\cos z-i\sin z)\right]\\&=\cos z\end{aligned}$$

故得證。

6. $\sinh(iz)=i\sin z$ 之證明

由雙曲線函數之定義知：

$$\begin{aligned}\sinh(iz)&=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}\\&=\frac{1}{2}\left[(\cos z+i\sin z)-(\cos z-i\sin z)\right]\\&=i\sin z\end{aligned}$$

故得證。

7. $\cos(iz) = \cosh z$ 之證明

由式(2)之定義知：

$$\cos(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
$$= \cosh z$$

故得證。

8. $\sin(iz) = i \sinh z$ 之證明

由式(2)之定義知：

$$\sin(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$= \frac{1}{i} \sinh z$$
$$= -i \sinh z$$

故得證。