提要 323：複數解析函數與 Laplace 方程式

定理：Laplace 方程式
若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在定義域中為解析函數，則 u 、v 分別滿足 Laplace 方程式，即： $\nabla^2 u=0$ 、$\nabla^2 v=0$

【證明】

因為 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在定義域中為解析函數，故其滿足 Cauchy-Riemann 方程式：

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \text{ 、 } \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{1}$$

茲引用式(1)並進行 $\nabla^2 u$ 之運算，可知：

$$\begin{aligned}
\nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}
\end{aligned}$$

因為 $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$，所以 $\nabla^2 u=0$ 。故第一部分已得證。

茲再引用式(1)並進行$\nabla^2 v$之運算，可知：

$$\begin{aligned}\nabla^2 v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\end{aligned}$$

因為$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$，所以$\nabla^2 v = 0$。故第二部分亦已得證。

【附註】

1. 凡適合 Laplace 方程式之函數，均可稱之為**諧和函數（Harmonic Function）**。

2. 解析函數之實數部分與虛數部分均為諧和函數，常稱兩者互為**共軛諧和函數（Conjugate Harmonic Function）**。

3. 以下函數為基本解析函數：

(a) 多項式：$f(z)=z^n$、$n=0,1,2,\cdots$。

(b) 整數冪級數：$f(z)=\sum_{k=0}^{n} A_k z^k$，其中$A_k$為實數或複數。

(c) 有理函數：$f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$、$Q(z)$均為多項式，且$Q(z)\neq 0$。

(d) 指數函數：$f(z)=e^z$。

(e) 三角函數：$\sin z$、$\cos z$。