提要 321：Cauchy-Riemann 方程式

定理：Cauchy-Riemann 方程式

設複變函數 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，若問題之定義域符合 Cauchy-Riemann 方程式 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$、$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，則函數 $f(z)$在該定義域為解析函數。

【證明】

已知函數 $f(z)$之微分係定義為：

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{1}$$

因為 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，所以式(1)可改寫為：

$$\begin{aligned} f'(z)&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y}\\ &=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)]+i[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y} \end{aligned} \tag{2}$$

①先考慮$\Delta y\to 0$，再考慮$\Delta x\to 0$

基於此，式(2)可表為：

$$\begin{aligned} f'(z)&=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x\to 0}}\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)]+i[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x,y)-u(x,y)]+i[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)]}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{i[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)]}{\Delta x}\\ &=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{aligned} \tag{3}$$

②先考慮$\Delta x \to 0$，再考慮$\Delta y \to 0$

同理，可將式(2)化簡為：

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x,y)]+i[v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x, y+\Delta y)-u(x,y)]+i[v(x, y+\Delta y)-v(x,y)]}{i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{i[v(x, y+\Delta y)-v(x,y)]}{i\Delta y} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{i[u(x, y+\Delta y)-u(x,y)]}{i^2\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y} \\
&= -i\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y} \\
&= -i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

因$\Delta x \to 0$與$\Delta y \to 0$之運算順序是可以交換的，故式(3)與式(4)之結果應相同。比較式(3)與式(4)知：

$$
\boxed{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \text{、} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}}
\tag{5}
$$

或

$$
\boxed{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \text{、} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}}
\tag{6}
$$

故得證。

範例一
試說明可微分之函數 $f(z)=z^2$ 滿足 Cauchy-Riemann 方程式。

【說明】

因為 $f(z)=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy)$，所以 $u(x,y)=x^2-y^2$、$v(x,y)=2xy$。先進行函數 u、v 對變數 x、y 作微分：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \text{、} \frac{\partial u}{\partial y}=-2y \text{、} \frac{\partial v}{\partial x}=2y \text{、} \frac{\partial v}{\partial y}=2x$$

再代入 Cauchy-Riemann 方程式作檢驗知，上式符合：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \text{、} \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

故此一問題確實滿足 Cauchy-Riemann 方程式，即函數 $f(z)=z^2$ 在複數平面上均為解析函數。

範例二
試說明不可微分之函數 $f(z)=\bar{z}$ 不滿足 Cauchy-Riemann 方程式。

【說明】

已知 $f(z)=\bar{z}=x-iy$，故 $u(x,y)=x$、$v(x,y)=-y$。先進行函數 u、v 對變數 x、y 之微分：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1 \text{、} \frac{\partial u}{\partial y}=0 \text{、} \frac{\partial v}{\partial x}=0 \text{、} \frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

再代入 Cauchy-Riemann 方程式作檢驗知：

$$\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y} \text{、} \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

雖然 Cauchy-Riemann 方程式中有一個是有滿足的，但只要有一個條件不符合，問題即屬於不滿足 Cauchy-Riemann 方程式之情況。