

提要 347：比例試驗法 (Ratio Test)

比例試驗法 (Ratio Test) 是檢驗級數是否收斂的好方法，許多研究所考試也常看到與此類方法相關之考題。其觀念很簡單，請讀者留意它。

定理：比例試驗法 (Ratio Test)

已知 $z_1 + z_2 + z_3 + \dots$ 為一級數，並考慮 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L$ 。

- (a) 若 $L < 1$ ，則 $z_1 + z_2 + z_3 + \dots$ 為收斂級數。
- (b) 若 $L > 1$ ，則 $z_1 + z_2 + z_3 + \dots$ 為發散級數。
- (c) 若 $L = 1$ ，則無法引用比例試驗法檢驗級數是否收斂。

範例一

試問級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100+75i)^n}{n!} = 1 + (100+75i) + \frac{1}{2!}(100+75i)^2 + \dots$ 是否收斂？

【解答】

由比例試驗法知：

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(100+75i)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(100+75i)^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|100+75i|}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{125}{n+1} = 0$$

當 $n \rightarrow \infty$ 時，其比值 $L = 0$ ，故此級數收斂。