

提要 331：複數平面上之線積分

在複數平面上，其**線積分 (Line Integral)** 的觀念與向量之線積分相關。讀者若對向量不熟悉，亦可直接引用純量函數之線積分觀念思考複變函數之線積分問題，以下詳細加以說明。

複數平面上之線積分的定義

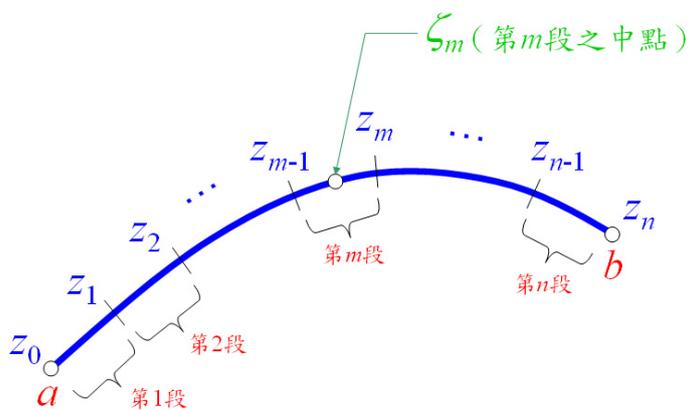
茲考慮複數平面上有一曲線如圖一所示，將該曲線切割成 n 段，每一小段曲線之長度約為 $|\Delta z_m|$ ，再取其中點 ζ_m ，計算出函數 $f(z)$ 之值 $f(\zeta_m)$ ，並計算 $f(\zeta_m)\Delta z_m$ 之數值，最後再將每一線段所計算出之 $f(\zeta_m)\Delta z_m$ 加起來，亦即考慮如下所示之運算：

$$\sum_{m=1}^n f(\zeta_m)\Delta z_m \quad (1)$$

當 $n \rightarrow \infty$ 時，上式可以積分的型態加以表示，亦即：

$$\int_a^b f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n f(\zeta_m)\Delta z_m \quad (2)$$

式(2)即為複數平面上之線積分概念。



圖一 複數平面上之積分曲線