

提要 11：解一階 ODE 的第四個方法--更換變數使成變數分離(2)

若原來的微分方程式為：

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \text{ 且 } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k \quad (1)$$

則 $a_1 = a_2k$ ， $b_1 = b_2k$ ，而 $a_2x + b_2y$ 可改寫為 $k(a_1x + b_1y)$ 。若作變數變換，令：

$$v(x) = a_2x + b_2y, \text{ 即 } y = \frac{1}{b_2}(v - a_2x)$$

則式(1)可改寫為：

$$\frac{d\left[\frac{1}{b_2}(v - a_2x)\right]}{dx} = f\left(\frac{kv + c_1}{v + c_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b_2}\left[\frac{dv}{dx} - a_2\frac{dx}{dx}\right] = f\left(\frac{kv + c_1}{v + c_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b_2}\frac{dv}{dx} = \frac{a_2}{b_2} + f\left(\frac{kv + c_1}{v + c_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{a_2}{b_2} + f\left(\frac{kv + c_1}{v + c_2}\right)}\frac{dv}{dx} = b_2 \quad (2)$$

上式即呈現變數分離的型式，其等號的左邊與 v 變數有關，而等號右邊之常數可視為與 x 變數有關。因此，式(2)可直接對 x 變數作積分：

$$\int \frac{1}{\frac{a_2}{b_2} + f\left(\frac{kv + c_1}{v + c_2}\right)}\frac{dv}{dx} dx = \int b_2 dx + c$$

即

$$\int \frac{1}{\frac{a_2}{b_2} + f\left(\frac{kv + c_1}{v + c_2}\right)} dv = b_2x + c \quad (3)$$

只要能夠知道函數 f 的型式，則等號左邊之積分值即可研討出，最後再將 $v = a_2x + b_2y$ 之關係代回式(3)，即可求出問題之通解。

範例一

試解出微分方程式 $(2x - 4y + 5)\frac{dy}{dx} + (x - 2y + 1) = 0$ 之通解。

【解答】

原微分方程式可改寫為：

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - 2y + 1}{2x - 4y + 5} \quad (a)$$

由此可知，其中等號右邊之變數 x 、 y 的係數比例相等，故應可利用變數變換的概念將問題化簡為變數可分離的微分方程式。亦即，可令：

$$v(x) = x - 2y \quad (b)$$

故

$$y = \frac{1}{2}(x - v) \quad (b')$$

且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dx} - \frac{dv}{dx}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{dv}{dx}\right) \quad (b'')$$

將式(b')與式(b'')代回式(a)，則：

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{dv}{dx}\right) = -\frac{v + 1}{2v + 5}$$



$$1 - \frac{dv}{dx} = -\frac{2v + 2}{2v + 5}$$



$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{2v + 2}{2v + 5} = \frac{4v + 7}{2v + 5}$$



$$\frac{2v + 5}{4v + 7} \frac{dv}{dx} = 1$$

再對變數 x 作積分：

$$\int \frac{2v + 5}{4v + 7} \frac{dv}{dx} dx = \int dx + C$$



$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{3}{4v + 7}\right) dv = x + C$$



$$\frac{1}{2}v + \frac{3}{8} \ln(4v + 7) = x + C$$

再將式(b)代回上式，即可求出問題之通解如下：

$$\frac{1}{2}(x - 2y) + \frac{3}{8} \ln(4x - 8y + 7) = x + C$$



$$3 \ln(4x - 8y + 7) = 8x + 8C - 4x + 8y$$



$$3\ln(4x - 8y + 7) = 4x + 8y + \tilde{C} \ , \ \tilde{C} = 8C$$

習題

1. 試解 $y'(x-y+3)=(x-y+2)$ 之通解。【91 台科大營建所結構組 20%】
2. Find the general solution of the differential equation $y' + \frac{2x-5y-9}{4x-y-9} = 0$. 【94 成大電機所 17%】
3. Solve the differential equation $(2x-5y+3)dx - (2x+4y-6)dy = 0$. 【92 北科冷凍所 5%】
4. Slove $y' = \frac{x-y+6}{3x-3y+4}$. 【93 淡江機械所 15%】
5. Slove $(2x-4y+5)y' + x-2y+3 = 0$. 【94 彰師光電所 7%】
6. Solve $(x-2y+3)dx + (2x-4y-3)dy = 0$. 【94 北科冷凍所 10%】
7. Slove $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$. 【93 海洋導航所 15%】
8. Slove $\frac{dy}{dx} = \frac{y-3}{x+y-1}$. 【92 台科營建所 20%】
9. Slove $(2x+y)dy = (x+2y)dx$. 【88 台大土木所 10%】
10. Slove $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+2}{y+x}$. 【91 北科製造所 12%】
11. Slove $(x-y-1)dx + (4y+x-1)dy = 0$. 【91 中興化工所 10%】
12. 求解 $(2+2x^2y^{1/2})ydx + (x^2y^{1/2}+2)xdy = 0$. 【93 師大工教所 10%】
13. Solve the differential equation $1 + e^{y/x} - \frac{y}{x}e^{y/x} + e^{y/x}\frac{dy}{dx} = 0$, $y(1) = -5$. 【94 北科製造所 20%】
14. Solve the differential equation $y' = (-2x+y)^2 - 7$, $y(0) = 0$. 【90 高科電控所 12%】
15. Slove $y' = (-2x+y)^2 - 7$, $y(0) = 0$. 【90 高雄科大電控所 12%】
16. Slove $y' = (x+y+1)^2$. 【89 中山電機所 15%】

17. Solve $\frac{1}{2}y^2 + 2ye^t + (y + e^t)y' = 0$, $y(0) = 1$. 【90 暨南電機所 12%】
18. Solve $y' = (x + y - 2)^2$. 【88 台大工程科學所 10%】
19. Solve $\frac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1}$. 【86 清大化工所 20%】
20. Solve $(2 + 2x^2y^{1/2})ydx + (x^2y^{1/2} + 2)xdy = 0$. 【中山機械所 7%】
21. Solve $y' = y^2 - 4xy + 4x^2 + 2$. 【88 雲科電機所 10%】
22. Find the general solution of $(x - y - 1)dx + (4y + x - 1)dy = 0$. 【91 中興化工所 10%】
23. Solve $y' = \frac{x - y}{2x - 2y + 1}$. 【88 北科機電所 8%】
24. Solve $(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$. 【88 北科低溫所 5%】
25. Solve $y' = \frac{(x - y + 1)^2}{(x + 1)^2}$. 【87 台大化工所 10%】
26. Solve $y' = \frac{x + y - 5}{x - y + 1}$. 【86 成大土木所 9%】
27. Solve $y' = (y + 4x)^2$, $y(0) = 0$. 【90 成大航太所 12%】
28. Solve $2xy' = 2y - (y - x)^2$. 【89 北科土木所 15%】
29. Solve $xy' - y \ln y = x^2y$, Hint: $u = \ln y$. 【88 北科高分子所 8%】
30. Solve $y' = \frac{e^{x-y}}{e^{x-y} - 1}$. 【91 元智工工所 10%】
31. Find the general solution for the following differential equation
 $(x - y^2)dx + y(1 + x)dy = 0$. 【91 師大機電所 10%】
32. 試解一階微分方程 $y' = \frac{x - y + 2}{x - y + 3}$. 【95 台科營建所 15%】
33. Find the general solution for $y' = (y + x)(y + x - 2) - 1$, where y is a function of x . 【95 交大土木所 15%】

34. Solve $y'' = 1 + (y')^2$. 【92 台科電機所 10%】

35. Solve $y'' + (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$. 【93 北科光電所 10%】

36. Solve $y'' = x(y')^3$. 【93 北科機電所 10%】

37. Solve $y(x)$ for $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 \right] = 0$. 【93 交大機械所 17%】

38. Solve $y'' + x(y')^2 = 0$. 【93 成大通訊所 16%】

39. Solve $x^2y' + xy + \sqrt{1 - x^2y^2} = 0$. 【94 北科自動化所 20%】

40. Solve the differential equation $xy'' - 2\sqrt{1 + (y')^2} = 0$. 【91 北科機電所 15%】