提要 293：應用分離變數法解析軸對稱波傳問題

作者曾介紹如何以分離變數法解析一維暨二維波傳問題，以下將介紹如何以分離變數法解析軸對稱波傳問題。

軸對稱波傳問題之數學模式

如圖 1 所示軸對稱振動問題之數學模式為：

- **控制方程式**：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 【牛頓第二運動定律的化身】，其中 $u(r,t)$ 表質點之位移量；係數 c 是波傳速度。
- **邊界條件**：$u(R,t)=0$ 【圓形薄膜四周為固定端】
- **初始條件**：$u(r,0)=f(r)$ 【圓形薄膜之初始形狀為 $f(r)$】

  $\dfrac{\partial u(r,0)}{\partial t}=g(r)$ 【圓形薄膜之初始速度為 $g(r)$】

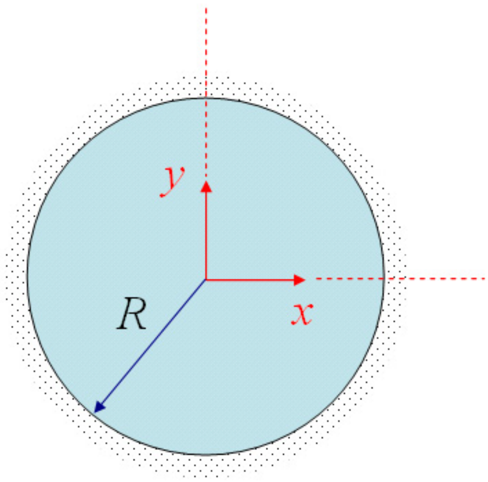

圖 1　圓形薄膜振動問題示意圖

解答：

紅色框線部分很重要，其有助於瞭解控制方程式暨每一個條件方程式在工程上所代表的意義。二維波傳問題之控制方程式若以極座標 (r,θ) 加以表示，則應表為 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，但本題是考慮此一波傳問題具有軸對稱性，故問題與變

數θ無關，因此$u(r,t)$對變數θ微分時，其結果為零。基於此，問題之控制方程式可改寫為$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$。茲將解析過程分為三個步驟，說明如下。

■ 步驟一　引用分離變數法

茲考慮空間變數與時間變數可分離，亦即令$u(r,t)=W(r)G(t)$，再代入控制方程式：

$$\frac{\partial^2 (WG)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial (WG)}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (FG)}{\partial t^2} \tag{1}$$

上式等號左邊僅需分別對r微分，等號右邊僅需對t微分，故上式可改寫為：

$$G\frac{d^2 W}{dr^2}+\frac{G}{r}\frac{dW}{dr}=\frac{F}{c^2}\frac{d^2 G}{dt^2} \tag{2}$$

為方便起見，式(2)亦常表為：

$$GW''+\frac{G}{r}W'=\frac{1}{c^2}F\ddot{G} \tag{2'}$$

其中$W''=\frac{d^2 W}{dr^2}$、$W'=\frac{dW}{dr}$、$\ddot{G}=\frac{d^2 G}{dt^2}$。式(2')等號左右兩邊同時除以$WG$，則式(2')可改寫為：

$$\frac{W''}{W}+\frac{1}{r}\frac{W'}{W}=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}}{G} \tag{3}$$

因上式等號左邊為與函數$W(r)$有關之運算，故其運算結果應與變數 r 有關；同理，上式等號右邊為與函數$G(t)$有關之運算，且波速c為常數，故其運算結果應與變數t有關。然而，一個和變數r有關之運算若欲與一個和變數t有關之運算相等，唯一的可能就是它們都是常數，也就是說：

$$\frac{W''}{W}+\frac{1}{r}\frac{W'}{W}=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}}{G}=常數 \tag{4}$$

但是常數還是有講究的，常數可分為三類：❶零 ❷正的常數 ❸負的常數，其中僅第三種狀況會是合理的！另兩種狀況在之前的一維波傳問題中已有說明，故本單元暫不再討論第❶、❷種情況。基於此，式(4)可表為：

$$\frac{W''}{W}+\frac{1}{r}\frac{W'}{W}=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}}{G}=-k^2 \tag{5}$$

上式可拆開變成兩個微分方程式：

$$r^2 W'' + rW' + k^2 r^2 W = 0 \tag{6a}$$

$$\ddot{G} + c^2 k^2 G = 0 \tag{6b}$$

解析式(6b)暨式(6b)，即可推求出問題之通解(General Solution)。

■ 步驟二　$u(r,t)$之通解的解析

式(6a)之解析

式(6a)作適當之變數變換，即可將式(6a)標準化為 Bessel 方程式。令：

$$s = kr \tag{7}$$

則

$$\frac{1}{r} = \frac{k}{s} \tag{8a}$$

$$\frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds}\frac{ds}{dr} = k\frac{dW}{ds} \tag{8b}$$

$$\frac{d^2W}{dr^2} = \frac{d\left(\frac{dW}{dr}\right)}{dr} = \frac{d\left(k\frac{dW}{ds}\right)}{dr} = \frac{d\left(k\frac{dW}{ds}\right)}{ds}\frac{ds}{dr} = k^2\frac{d^2W}{ds^2} \tag{8c}$$

式(8a)-(8c)代入式(6a)可得 $r^2k^2\frac{d^2W}{ds^2} + rk\frac{dW}{ds} + k^2r^2W = 0$，其中 $s = kr$，故式(6a)可改寫為：

$$s^2\frac{d^2W}{ds^2} + s\frac{dW}{ds} + s^2W = 0 \tag{9}$$

上式為標準型態之 Bessel 方程式。已知 Bessel 方程式為 $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$ 之通解為 $y(x) = C_1J_\nu(x) + C_2Y_\nu(x)$，其中 $J_\nu(x)$ 與 $Y_\nu(x)$ 分別 ν 階之第一種類型與第二種類型的 Bessel 函數。基於此，式(9)之解可表為：

$$W(s) = C_1J_0(s) + C_2Y_0(s) \tag{10}$$

因 $s = kr$ ，故式(10)亦可改寫為：

$$W(r)=C_1J_0(kr)+C_2Y_0(kr) \tag{11}$$

式(6b)之解析

茲考慮函數 $G(t)$ 解之型態為：

$$G(t)=e^{\lambda t} \tag{12}$$

再代回式(6b)，則式(6b)可表為：

$$\begin{aligned}&\left(e^{\lambda t}\right)''+c^2k^2\left(e^{\lambda t}\right)=0\\ \Rightarrow&\left(\lambda^2+c^2k^2\right)e^{\lambda t}=0\end{aligned}$$

因為 $e^{\lambda t}\neq 0$，所以

$$\lambda^2+c^2k^2=0 \tag{13}$$

上式稱之為**特徵方程式(Characteristic Equation)**。解析式(13)可得**特徵根(Characteristic Root)** $\lambda=\pm ick$，故 $G(t)=e^{ickt}$ 與 $G(t)=e^{-ickt}$ 均為式(6b)之解。因式(6b)為**線性且齊性之常微分方程式(Linear Homogeneous Ordinary Differential Equation)**，故可根據**重疊原理(Superposition Principle)**，將所得出之兩個 $G(t)$ 分別乘以係數 $\tilde{C}_1$、$\tilde{C}_2$，再作疊加之運算，則所得出的解仍為式(6b)之解，如以下所示：

$$G(t)=\tilde{C}_1e^{ickt}+\tilde{C}_2e^{-ickt} \tag{14}$$

上式還可根據**尤拉公式(Euler Formula)** $e^{\pm it}=\cos t\pm i\sin t$，將指數函數化簡為正弦和餘弦函數之和：

$$\begin{aligned}G(t)&=\tilde{C}_1(\cos ckt+i\sin ckt)+\tilde{C}_2(\cos ckt-i\sin ckt)\\&=\left(\tilde{C}_1+\tilde{C}_2\right)\cos ckt+i\left(\tilde{C}_1-\tilde{C}_2\right)\sin ckt\\&=A\cos ckt+B\sin ckt\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $A=C_1+C_2$、$B=i(C_1-C_2)$。由式(11)及式(15)知：

$$u(r,t)=\left[C_1J_0(kr)+C_2Y_0(kr)\right](A\cos ckt+B\sin ckt) \tag{16}$$

■ 步驟三　$u(r,t)$之特解的解析

由題意知，$u(r,t)$ 應滿足一個邊界條件及兩個初始條件，但實際上還缺少一個邊界

條件，這一個條件雖然題目沒有給，但我們可以自己找出來，這條件是薄膜之中點位移為有限值：

$$u(0,t) = \text{有限值} \tag{17}$$

現在一共有四個條件，四個條件剛好夠解式(16)中之四個獨立的未知數，說明如下。首先將$u(r,t)$代入式(17)之條件，則式(16)可表為：

$$u(0,t) = [C_1 J_0(0) + C_2 Y_0(0)](A\cos ckt + B\sin ckt) = \text{有限值} \tag{18}$$

其中牽涉$J_0(0)$、$Y_0(0)$，需分別參考圖 2 與圖 3 之說明。

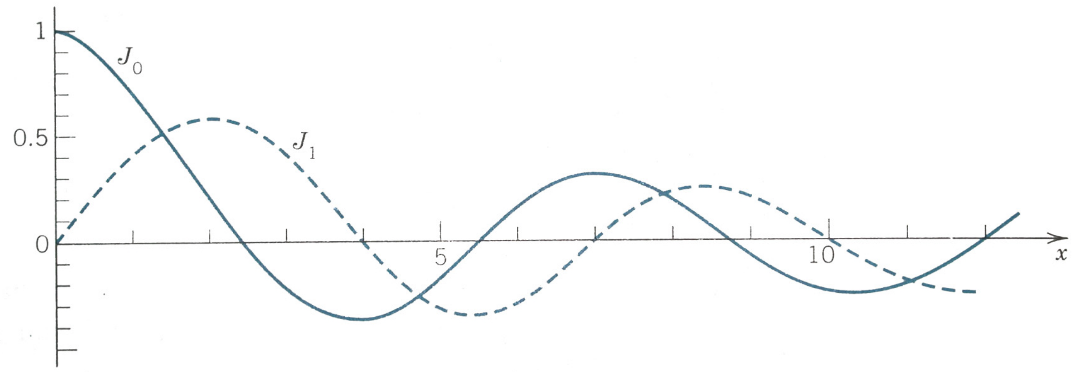

圖 2　零階之第一種類型的 Bessel 函數$J_0(x)$

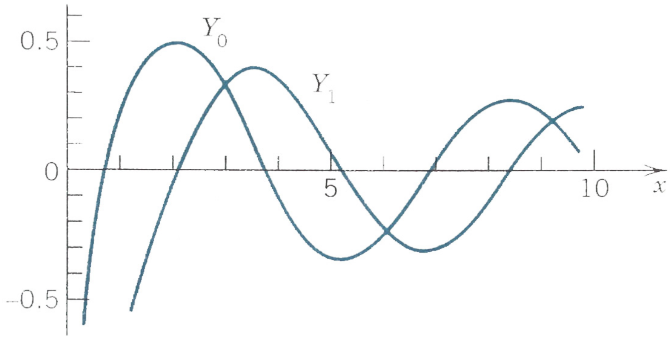

圖 3　零階之第二種類型的 Bessel 函數$Y_0(x)$

由圖 2 與圖 3 知，$J_0(0)=0$、$Y_0(0)\to -\infty$。因此式(18)可改寫為：

$$u(0,t) = [C_2(-\infty)](A\cos ckt + B\sin ckt) = \text{有限值} \tag{18'}$$

因為其中之$A\cos ckt + B\sin ckt \neq 0$，故必須安排$C_2 = 0$。

其次再考慮圓形薄膜四周為固定端之邊界條件$u(R,t)=0$，基於此，可得：

$$u(R,t) = C_1 J_0(kR)(A\cos ckt + B\sin ckt) = 0 \tag{19}$$

同理，因為其中之 $A\cos ckt + B\sin ckt \neq 0$ ，故必須安排 $C_1 J_0(kR) = 0$ 。因為 $C_1 \neq 0$ 【若 $C_1 = 0$ ，則 $W(r) = 0$ ，且會導致 $u(r,t) = 0$ 】，所以：

$$J_0(kR) = 0 \tag{20}$$

觀察圖 2 可知，$J_0(x)$ 為振盪函數，故在某些特定點上，其函數值為零。滿足式(20)之 kR 特定點為：

$$kR = 2.4048,\ 5.5201,\ 8.6537,\ 11.7915,\ 14.9309,\ \cdots \tag{21}$$

亦即：

$$k = \frac{2.4048}{R}, \frac{5.5201}{R}, \frac{8.6537}{R}, \frac{11.7915}{R}, \frac{14.9309}{R}, \cdots \tag{22}$$

❶ 當 $k = \dfrac{2.4048}{R}$ 時

$$u(r,t) = C_1 J_0\left(\frac{2.4048}{R} r\right)\left[A\cos\left(\frac{2.4048}{R} ct\right) + B\sin\left(\frac{2.4048}{R} ct\right)\right] = u_1$$

❷ 當 $k = \dfrac{5.5201}{R}$ 時

$$u(r,t) = C_1 J_0\left(\frac{5.5201}{R} r\right)\left[A\cos\left(\frac{5.5201}{R} ct\right) + B\sin\left(\frac{5.5201}{R} ct\right)\right] = u_2$$

❸ 當 $k = \dfrac{8.6537}{R}$ 時

$$u(r,t) = C_1 J_0\left(\frac{8.6537}{R} r\right)\left[A\cos\left(\frac{8.6537}{R} ct\right) + B\sin\left(\frac{8.6537}{R} ct\right)\right] = u_3$$

❹ 當 $k = \dfrac{11.7915}{R}$ 時

$$u(r,t) = C_1 J_0\left(\frac{11.7915}{R} r\right)\left[A\cos\left(\frac{11.7915}{R} ct\right) + B\sin\left(\frac{11.7915}{R} ct\right)\right] = u_4$$

❺ 當 $k = \dfrac{14.9309}{R}$ 時

$$u(r,t)=C_1J_0\left(\frac{14.9309}{R}r\right)\left[A\cos\left(\frac{14.9309}{R}ct\right)+B\sin\left(\frac{14.9309}{R}ct\right)\right]=u_5$$

因控制方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 為線齊性偏微分方程式，故以上所示之各種不同型態的 $u(r,t)$ 之解，又可以利用重疊原理加以疊加，組成較廣義之解的型態：

$$\begin{aligned}
u(r,t)&=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3+c_4u_4+c_5u_5+\cdots\\
&=c_1\left\{C_1J_0\left(\frac{2.4048}{R}r\right)\left[A\cos\left(\frac{2.4048}{R}ct\right)+B\sin\left(\frac{2.4048}{R}ct\right)\right]\right\}\\
&+c_2\left\{C_1J_0\left(\frac{5.5201}{R}r\right)\left[A\cos\left(\frac{5.5201}{R}ct\right)+B\sin\left(\frac{5.5201}{R}ct\right)\right]\right\}\\
&+c_3\left\{C_1J_0\left(\frac{8.6537}{R}r\right)\left[A\cos\left(\frac{8.6537}{R}ct\right)+B\sin\left(\frac{8.6537}{R}ct\right)\right]\right\}\\
&+c_4\left\{C_1J_0\left(\frac{11.7915}{R}r\right)\left[A\cos\left(\frac{11.7915}{R}ct\right)+B\sin\left(\frac{11.7915}{R}ct\right)\right]\right\}\\
&+c_5\left\{C_1J_0\left(\frac{14.9309}{R}r\right)\left[A\cos\left(\frac{14.9309}{R}ct\right)+B\sin\left(\frac{14.9309}{R}ct\right)\right]\right\}\\
&+\cdots
\end{aligned}\tag{23}$$

若考慮 $A_1=c_1C_1A$、$B_1=c_1C_1B$、$A_2=c_2C_1A$、$B_2=c_2C_1B$、$A_3=c_3C_1A$、$B_3=c_3C_1B$、等等，則式(23)又可改寫為：

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\{A_n\cos(k_nct)+B_n\sin(k_nct)\}J_0(k_nr)\tag{24}$$

其中 $k_n=\frac{2.4048}{R},\frac{5.5201}{R},\frac{8.6537}{R},\frac{11.7915}{R},\frac{14.9309}{R},\cdots$。

所計算出之 $u(r,t)$ 再代入條件不為零之初始條件 $u(r,0)=f(r)$、$\frac{\partial u(r,0)}{\partial t}=g(r)$ 中，則：

$$u(r,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\{A_n\cos 0+B_n\sin 0\}J_0(k_nr)=f(r)\tag{25a}$$

$$\frac{\partial u(r,0)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\{-k_ncA_n\sin 0+k_ncB_n\cos 0\}J_0(k_nr)=g(r)\tag{25b}$$

式(25a)與式(25b)又可改寫為：

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) = f(r) \tag{26a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n c B_n J_0(k_n r) = g(r) \tag{26b}$$

若欲求出式(26a)與式(26b)中之係數 A_n、B_n，則需引用一種與 Bessel 函數有關之 Fourier 級數的觀念。說明如下：

若函數 $f(x)$ 可以用與 Bessel 函數相關之 Fourier-Bessel 級數加以表示：

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_n(k_{mn} x)$$

則其中之係數 $a_m = \dfrac{2}{R^2 J_{n+1}^2(k_{mn} R)} \displaystyle\int_0^R x f(x) J_n(k_{mn} x) dx$。

上式中有引用此一關係式 $\displaystyle\int_0^R x J_n^2(k_{mn} x) dx = \frac{1}{2} R^2 J_{n+1}^2(k_{mn} R)$。

應用以上觀念，則

$$A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(k_n R)} \int_0^R r f(r) J_n(k_n r) dr \tag{27a}$$

$$k_n c B_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(k_n R)} \int_0^R r g(r) J_n(k_n r) dr \tag{27b}$$

故

$$B_n = \frac{2}{c k_n R^2 J_1^2(k_n R)} \int_0^R r g(r) J_n(k_n r) dr \tag{27b'}$$

將 A_n 、B_n 代回式(24)，則最後滿足問題之邊界條件及初始條件的特解可整理為：

$$\boxed{\begin{aligned} u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg\{ & \left[\frac{2}{R^2 J_1^2(k_n R)} \int_0^R r f(r) J_n(k_n r) dr \right] \cos(k_n c t) \\ & + \left[\frac{2}{c k_n R^2 J_1^2(k_n R)} \int_0^R r g(r) J_n(k_n r) dr \right] \sin(k_n c t) \Bigg\} J_0(k_n r) \end{aligned} \qquad (28)}$$