提要 249：曲面之面積

曲面之面積

如圖 1 所示，若曲面 S 可以位置向量 $\mathbf{r}(u,v)$ 加以表示，則曲面 S 之面積 A 可表為：

$$A=\iint_S dA=\iint_S|d\mathbf{A}|=\iint_S\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|dudv \tag{1}$$

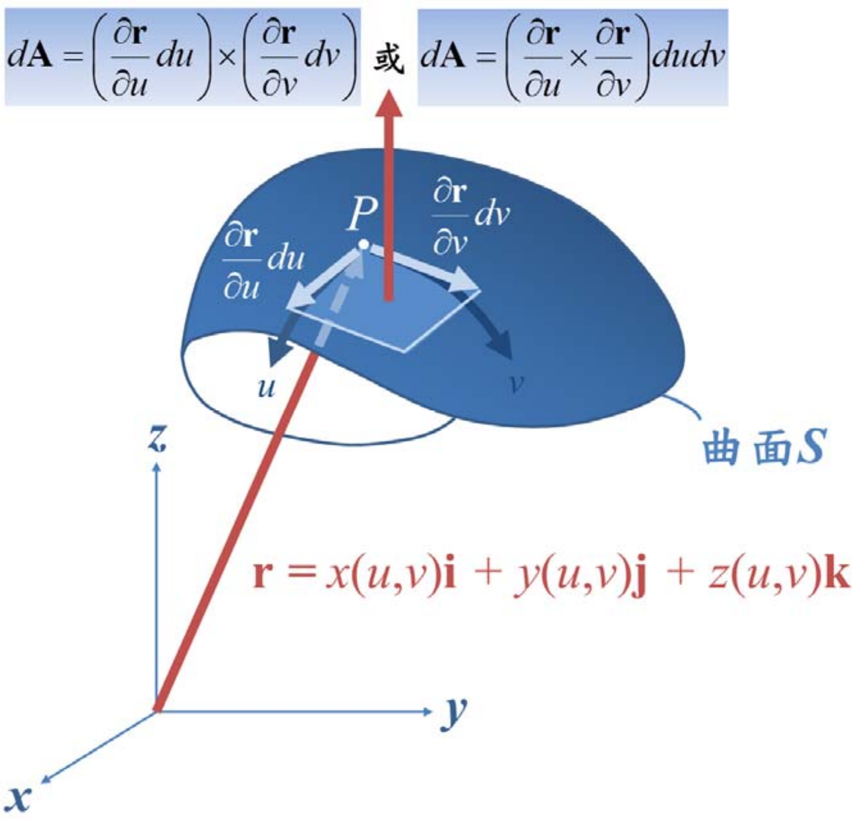

圖 1　在曲面 $\mathbf{r}(u,v)$ 上取微小面積元素 $d\mathbf{A}$ 之*示意圖

【證明】

已知微小面積 $d\mathbf{A}=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right)dudv$，故其面積大小 $dA=|d\mathbf{A}|=\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|dudv$，所以：

$$A=\iint_S dA=\iint_S|d\mathbf{A}|=\iint_S\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|dudv$$

故得證。

範例一

已知如圖 2 所示半徑為 a 之圓球曲面 S 可表為：

$$\mathbf{r}(u,v)=a\cos u\cos v\mathbf{i}+a\sin u\cos v\mathbf{j}+a\sin v\mathbf{k} \text{ 、 } 0\le u\le 2\pi \text{ 、 } -\frac{\pi}{2}\le v\le\frac{\pi}{2}$$

試求圓球曲面之表面積。

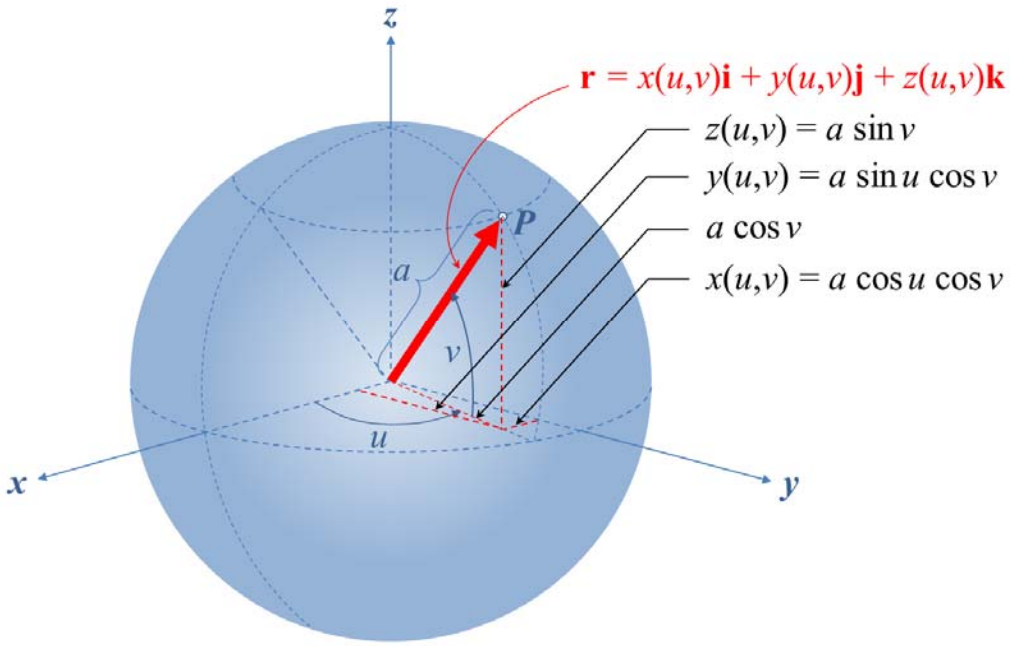

圖 2　圓球曲面示意圖

解答：

$$\begin{aligned}
A&=\iint_S\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|dudv\\
&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial\left(a\cos u\cos v\mathbf{i}+a\sin u\cos v\mathbf{j}+a\sin v\mathbf{k}\right)}{\partial u}\times\frac{\partial\left(a\cos u\cos v\mathbf{i}+a\sin u\cos v\mathbf{j}+a\sin v\mathbf{k}\right)}{\partial v}\right|dudv\\
&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\left|\left(-a\sin u\cos v\mathbf{i}+a\cos u\cos v\mathbf{j}\right)\times\left(-a\cos u\sin v\mathbf{i}-a\sin u\sin v\mathbf{j}+a\cos v\mathbf{k}\right)\right|dudv\\
&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\left\|\begin{matrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-a\sin u\cos v&a\cos u\cos v&0\\-a\cos u\sin v&-a\sin u\sin v&a\cos v\end{matrix}\right\|dudv
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin u\cos v & a\cos u\cos v & 0 \\ -a\cos u\sin v & -a\sin u\sin v & a\cos v \end{vmatrix} \right| dudv \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} \left| a^2\cos u\cos^2 v\mathbf{i} + a^2\sin u\cos^2 v\mathbf{j} + \left(a^2\sin^2 u\sin v\cos v + a^2\cos^2 u\sin v\cos v\right)\mathbf{k} \right| dudv \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} \left| a^2\cos u\cos^2 v\mathbf{i} + a^2\sin u\cos^2 v\mathbf{j} + a^2\sin v\cos v\mathbf{k} \right| dudv \\
&= a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} \left| \cos u\cos^2 v\mathbf{i} + \sin u\cos^2 v\mathbf{j} + \sin v\cos v\mathbf{k} \right| dudv \\
&= a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\left(\cos u\cos^2 v\right)^2 + \left(\sin u\cos^2 v\right)^2 + \left(\sin v\cos v\right)^2}\, dudv \\
&= a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\cos^2 u\cos^4 v + \sin^2 u\cos^4 v + \sin^2 v\cos^2 v}\, dudv \\
&= a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\left(\cos^2 u + \sin^2 u\right)\cos^4 v + \sin^2 v\cos^2 v}\, dudv \\
&= a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\cos^4 v + \sin^2 v\cos^2 v}\, dudv \\
&= a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)\cos^2 v}\, dudv \\
&= a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} \sqrt{\cos^2 v}\, dudv \\
&= a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{2\pi} \cos v\, dudv \\
&= a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos v\right)\left[u\right]_{u=0}^{u=2\pi} dv \\
&= 2\pi a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos v\right) dv \\
&= 2\pi a^2\left[\sin v\right]_{v=-\pi/2}^{v=\pi/2} \\
&= 2\pi a^2\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= 2\pi a^2\left[1-\left(-1\right)\right] \\
&= 4\pi a^2
\end{aligned}
$$

即圓球曲面之表面積為$4\pi a^2$。