

## 提要 206：正交向量(Orthogonal Vector)之定義

兩個向量互相垂直時，稱這兩個向量互為正交向量(Orthogonal Vector)。

### 正交向量(Orthogonal Vector)

若  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ 、 $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ ，且  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ，則稱向量  $\mathbf{a}$  正交於  $\mathbf{b}$ ，同理向量  $\mathbf{b}$  亦正交於  $\mathbf{a}$ ，且向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  組成一組 **正交向量(Orthogonal Vector)**。

正交向量之基本性質還包括：

1. 若  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ，則可能是：❶ 向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  互相垂直；❷ 向量  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ；❸ 向量  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 。
2. 由兩個向量之內積  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \gamma$  可計算出兩個向量之夾角  $\gamma = \cos^{-1} \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$ ，對正交向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  而言， $\gamma = 90^\circ$ 。
3. 令  $\gamma$  表向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  之夾角：❶ 若  $\gamma < 90^\circ$ ，則  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ ；❷ 若  $\gamma > 90^\circ$ ，則  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ ；❸ 若  $\gamma = 90^\circ$ ，則  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 。
4.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  是一種投影的概念。若向量  $\mathbf{b}$  是個單位向量(Unit Vector)，則  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  表示向量  $\mathbf{a}$  投影在向量  $\mathbf{b}$  身上的量；若向量  $\mathbf{a}$  是個單位向量，則  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  亦表示向量  $\mathbf{b}$  投影在向量  $\mathbf{a}$  身上的量。
5. 只要  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ，就可稱呼向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  組成一組正交向量，即使向量  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$  都是零向量  $\mathbf{0}$  也適用。
6. 零向量  $\mathbf{0}$  正交於任意之向量  $\mathbf{c}$ ，因為  $\mathbf{0} \cdot \mathbf{c} = 0$ 。