

提要 138：與 *Fourier-Bessel* 級數有關之基本積分式

有一個稱為 *Fourier-Bessel* 級數問題，曾以考題型式出現，故筆者擬加以介紹。

範例一

試說明 *Fourier-Bessel* 級數之觀念。

說明：

在解析圓形薄膜振動問題時，是以分離變數方法(*Separation of Variables*)求解，所求出之解即呈 *Fourier-Bessel* 級數之型態。因讀者大部分都還沒有學過分離變數法，所以其分析過程暫不介紹，但這裏會給一個簡要的觀念。

Fourier-Bessel 級數係指：

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_n(k_{mn}x) = a_1 J_n(k_{1n}x) + a_2 J_n(k_{2n}x) + a_3 J_n(k_{3n}x) + \dots$$

其中 k_{mn} 之值為使 $J_n(k_{mn}x) = 0$ 之根。在解析圓形薄膜之振動問題時，其定義域為 $0 \leq x \leq R$ ，通常均考慮圓形薄膜之邊界 $x = R$ 是固定端。將邊界條件代入函數 $f(x)$ 中，即可決定出其中之係數 a_m ，如以下所示：

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{mn})} \int_0^R x f(x) J_n(k_{mn}x) dx, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$