提要 117：與 *Legendre* 多項式 $P_n(x)$有關之公式

Legendre 多項式 $P_n(x)$與 *Legendre* 方程式$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n(n+1)y=0$、$n\in R$ 有關，與其相關之關係式整理如下。

與 *Legendre* 多項式相關之方程式的整理
1. $P_0(x)=1$
2. $P_1(x)=x$
3. $P_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$
4. $P_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x$
5. $P_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8}$
6. $P_5(x)=\frac{63}{8}x^5-\frac{35}{4}x^3+\frac{15}{8}x$
7. $P_n(x)=\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}x^{n-2m}$，其中$M=\frac{n}{2}$或$\frac{n-1}{2}$(取整數)
8. $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$ (*Rodrigues* 公式)
9. $\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}$，$n=0,1,2,\cdots$
10. $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$
11. $P_n'(-x)=(-1)^{n+1}P_n'(x)$
12. $P_n(1)=1$
13. $P_n(-1)=(-1)^n$
14. $P_{2n+1}(0)=0$

15. $P_{2n}(0)=(-1)^n \cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)/2\cdot 4\cdots(2n)$

16. $(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$ ， $n=1, 2, 3, \cdots$

17. $P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\dfrac{d^m[P_n(x)]}{dx^m}$

18. $(x^2-1)\dfrac{dP_n(x)}{dx}=n\left[xP_n(x)-P_{n-1}(x)\right]=\dfrac{n(n+1)}{2n+1}\left[P_{n+1}(x)-P_{n-1}(x)\right]$