# 台灣科技大學

# 電子工程系

# 91~97 學年度
# 工程數學考古題

國立臺灣科技大學
九十一學年度碩士班招生考試試題

系所組別：電子工程系乙一組、電子工程系乙二組、電子工程系乙三組、電子工程系丙組
科　目：工程數學

(總分 100 分)

1. (15%)Solve $4y''+4(e^x-1)y'+e^{2x}y=0$
Note: Let $t=(1/2)x$

2. (10%)Solve $y''+4y=3\delta(t-2)$;$y(0)=3$, $y'(0)=0$

3. (15%)Show

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & \varepsilon^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 & \varepsilon^3 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 & \varepsilon^4 \end{vmatrix} = \begin{matrix}(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\varepsilon-\alpha) \\ (\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\varepsilon-\beta) \\ (\delta-\gamma)(\varepsilon-\gamma) \\ (\varepsilon-\delta)\end{matrix}$$

4. (10%)Use Gram-Schmidt process to find three orthonomal vectors from

$$v_1=\begin{bmatrix}1\\7\\1\\7\end{bmatrix},\ v_2=\begin{bmatrix}0\\7\\2\\7\end{bmatrix}\ \ v_3=\begin{bmatrix}1\\8\\1\\6\end{bmatrix}$$

5. (10%)Invert the Z transform $X(z)=1/(1-az^{-1})^2$ ,$|z|>a$.

6. (15%)Given a joint density function $f(x,y)$. Let $f(x,y)=x(1+3y^2)/4$ for $0<x<2$, $0<y<1$ and $f(x,y)=0$ elsewhere. Find its marginal densities and the conditional density $f(x|y)$.

7. (10%)Find
(a) $\oint_C F\cdot dR$, $F=\langle x,y,-z\rangle$, C the circle $x^2+y^2=4$, $z=0$.
(b) $\iint_\Sigma f(x,y,z)\,d\sigma$, where $f(x,y,z)=y$, $\Sigma$ the part of cylinder $z=x^2$ for $0<x<2$, $0<y<3$.

8. (15%)Compute $\oint_\Gamma f(z)dz$, where $f(z)=(2jz-\sin z)/(z^3+z)$ and $\Gamma$ is a closed path that enclosed 0, j, and $-j$.
Note: $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=(1/2)\left[x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]$

國立臺灣科技大學
九十二學年度碩士班招生考試試題
系所組別：電子工程系碩士班乙一組、乙二組、乙三組、丙組
科　目：工程數學

總分100分

(1) Solve $ty''+(4t-2)y'-4y=0$ $y(0)=1$. Furthermore if $y(0)$ is not known. Solve the differential equation again. (12%)

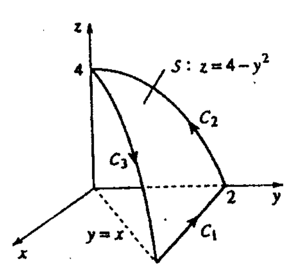
(2) Let $f(x)$ be integrable in $[-L,L]$. If $f(x)$ can be approximately represented as $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{3n\pi x}{L})+b_n\sin(\frac{5n\pi x}{L})$ find the coefficients $a_0$, $a_n$ and $b_n$. (10%)

(3) Assume that A, $\tau$ and $f_c$ are constants $f_c=10M$, a signal $f(t)=A\tau\frac{\sin^2\pi t\tau}{t^2\tau^2}\cos 2\pi f_c t$, find the energy of the signal. (8%)

(4) A vector field $\vec{V}=xz\ \hat{j}$ and a surface $z=4-y^2$ cut off by the planes $x=0, z=0$ and $y=x$ as shown in figure below. If $c=c_1+c_2+c_3$

(1) find $\oint_c \vec{V}\cdot d\vec{R}$ by Line integral. (8%)

(2) Solve (1) again by appling the *stokes's* Theorem. (12%)




5. Determine whether the following set of vectors is a subspace of $\mathbf{R}^n$ for the appropriate n.

(a) S consists of all vectors (2x,0,0,0,0,3y) in $\mathbf{R}^6$. (10pts)

(b) S consists of all vectors (x,1,y) in $\mathbf{R}^3$. (10pts)

6. Find a fundamental matrix for the system $\mathbf{X}'=AX$ with A the giving matrix. (10pts)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Find $\oint_\Gamma f(z)dz$, where $f(z)=z^2/(z+1)^2(z+3i)$ and $\Gamma$ is the circle of radius 9 about $-2i$. (10pts)

8. Show that u=sin x · cosh y satisfies the Laplace equation. (10pts)

國立臺灣科技大學
九十三學年度碩士班考試試題
系所組別：電子工程系乙一組、電子工程系乙二組、電子工程系乙三組、電子工程系丙組
科　目：工程數學

總分 100 分

(1) Solve

$$y'' + 9y = \frac{1}{4}\csc 3x \quad \text{and} \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - k^2)y = 0$$

where k is a constant (13 分)

(2) Prove Green's Theorem (12 分)

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad ,0<\theta<\pi, 0<r<c$$

$u(c,\theta)=u_0$ ,$0<\theta<\pi$

$u(r,0)=0$ ,$u(r,\pi)=0$ , $0<r<c$

$u(0,\theta)<\infty$ (13 分)

(4) $\vec{F} = xy\hat{i} + y^2 z\hat{j} + z^3\hat{k}$ evaluate $\iint_s (\vec{F}\cdot\hat{n})\,ds$ where s is the unit cube defined by $0\le x\le 1$ , $0\le y\le 1$ , $0\le z\le 1$ (12 分)

國立臺灣科技大學
九十三學年度碩士班考試試題
系所組別：電子工程系乙一組、電子工程系乙二組、電子工程系乙三組、電子工程系丙組
科　　目：工程數學

5. Find the Laplace Transform of

$$f(t)=\begin{cases}-2 & for \quad 0\le t<1\\ 0 & for \quad 1\le t<2\\ 3e^{t}+1 & for \quad t\ge 2\end{cases}$$

(15 分)

6. Find a basis for S, where S consists of vectors in the plane x-y+1=1

(10 分)

7. Solve the system $X' = AX + H$, where

$$A=\begin{bmatrix}1 & -10\\ -1 & 4\end{bmatrix} \quad ,H=\begin{bmatrix}e^{t}\\ e^{3t}\end{bmatrix}$$

(15 分)

8. Find the inverse Fourier Transform of

$e^{-2|w+2|}\cos(3w+6)$

(10 分)

國立臺灣科技大學
九十四學年度碩士班招生考試試題

系所組別：電子工程系碩士班乙一組
科　　目：工程數學

※總分為100分

1. (6%) Find the inverse of the block matrix given by

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{G} \end{bmatrix}$$

where $\mathbf{0}$ is an $n \times n$ zero matrix, $\mathbf{I}$ is an $n \times n$ identity matrix, and $\mathbf{G}$ is an $n \times n$ invertible matrix.

2. (16%) Let a $6 \times 6$ matrix $\mathbf{C}$ be defined as

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$$

where $\mathbf{I}$ is a $6 \times 6$ identity matrix and

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   **(a)** (10%) Determine the nullspace of $\mathbf{C}$ and find its dimension, where the nullspace of $\mathbf{C}$ is define as $\{\mathbf{x} | \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \mathcal{R}^6\}$.

   **(b)** (6%) Is it true that $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a solution for *all* $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^6$? Briefly explain your answer.

3. (16%) Suppose $\mathbf{A}$ is a $3 \times 3$ matrix with eigenvalues 1, 2, 3, then

   **(a)** (3%) Is $\mathbf{A}$ diagonalizable? Briefly explain your answer.

   **(b)** (3%) Determine the eigenvalues of $2\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{I}$.

   **(c)** (3%) Determine the determinant of $\mathbf{A} + \mathbf{I}$.

   **(d)** (3%) Determine the determinant of $2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$.

   **(e)** (4%) Determine $rank(\mathbf{A}^3)$.

4. (6%) Let $T$ be a linear transformation which rotates every vector in $\mathcal{R}^2$ by $30^0$ in the *counterclockwise* direction, then projects it on the x-axis. Determine the matrix representation of this linear transformation, i.e. if $T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \mathbf{B}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ for any vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^2$, then $\mathbf{B}$=?

5. (6%) Find an orthonormal basis for the column space of

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

90

國立臺灣科技大學
九十四學年度碩士班招生考試試題
系所組別：電子工程系碩士班乙一組
科　　目：工程數學

(6) Let $p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ , $-\infty<x<\infty$

Find $E[\min(|x|,1)]$ . (11%)

(7) Let $f_{XY}(x,y)=\begin{cases}A, 0<x<1, 0<x<y\\ 0, otherwise\end{cases}$ , where A is a constant .

Find the correlation $\rho_{XY}$ for X and Y (13%)

(8) X , Y are independent random variables with Binomial distribution .
where X~B($n_1$, p) , Y~B($n_2$, p) . Express P{ X=k | X+Y=n } in terms of
$C^{n}_{n_1+n_2}, C^{k}_{n_1}, C^{n-k}_{n_2}$ (13%)

(9) X , Y are independent random variables and obey the same distribution

$p(x)=\begin{cases}e^{-x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ Let $U=X+Y, V=\frac{X}{Y}$

prove that U , V are independent (13%)

91

國立台灣科技大學九十五學年度碩士班招生試題

系所組別： 電子工程系碩士班乙三組

科　　目： 工程數學

總分 100 分

1. Briefly answer the following questions. You will not get any credit if only the answer is given.

   (a) (5 points) Consider a $3 \times 3$ system of linear equations $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, where

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{and } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

   Determine the condition on $b_1$, $b_2$, and $b_3$ such that $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ does not have a solution.

   (b) (5 points) Let $\mathbf{A}$ be an $n \times n$ matrix with rank $r$, then which of the following matrices also has(have) rank $r$?

$$3\mathrm{A}^T, \ \begin{bmatrix} 2\mathrm{A} & 3\mathrm{A} \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{A} \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{bmatrix}$$

2. (5 points) Let $\mathbf{P}_n$ denote the set of all polynomials of degree less than $n$. Now, consider a subspace V of $\mathbf{P}_{10}$ which is given by

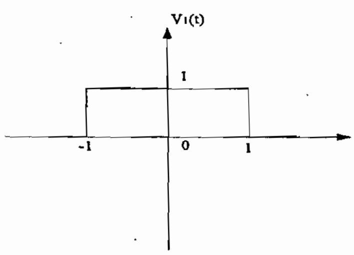
$$\mathsf{V} = \{p(x) : p(x) = x^9 p(x^{-1})\}$$

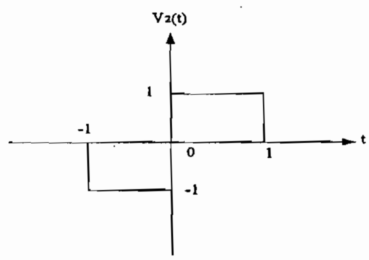
   Determine dim(V).

3. (a) (5 points) Suppose that $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$, then determine $\alpha$ and $\beta$ such that A has eigenvectors $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

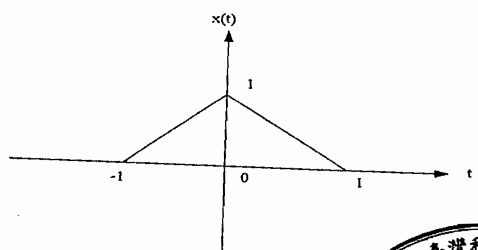
   (b) (5 points) Consider another $2 \times 2$ matrix $\mathbf{B}$ with the same eigenvectors $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$ as (a) and with respective eigenvalues $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = 0$. Determine $\mathbf{B}^{10}$.

4. (10 points) Consider a communication system which transmits the message $\gamma$ and $\eta$ through a linear combination with two known waveforms $v_1(t)$ and $v_2(t)$ by $\gamma v_1(t) + \eta v_2(t)$, where $\gamma$ and $\eta$ are **real numbers**, and $v_1(t)$ and $v_2(t)$ are given by




The receiver receives $x(t)$ and determines the transmitted $\gamma$ and $\eta$ by choosing $\gamma$ and $\eta$ which minimize $\left\|x(t) - (\gamma v_1(t) + \eta v_2(t))\right\|$, where $\|y(t)\| = \sqrt{< y(t), y(t) >}$ with $< y(t), z(t) > = \int_{-1}^{1} y(t)z(t)\,dt$. Now suppose that the received signal $x(t)$ is as given below. Determine the transmitted $\gamma$ and $\eta$.




100

國立台灣科技大學九十五學年度碩士班招生試題

系所組別：電子工程系碩士班乙三組

科 目：工程數學

5. Consider the partial differential equation given by

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x^2} = \eta^2 \frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial t^2}, \quad 0 < x < a, \ t > 0$$

where $\eta$ is a known constant.

(a) (7 points) Find a general solution for this partial differential equation.

(b) (8 points) Find the solution with initial condition

$$\Phi(0,t) = 0, \quad \Phi(a,t) = 0, \quad t > 0$$

$$\Phi(x,0) = 0, \ \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 1, \quad 0 < x < a$$

101

國立台灣科技大學九十五學年度碩士班招生試題

系所組別： 電子工程系碩士班乙三組

科　　目： 工程數學

6. Consider a differential equation of the form

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 2t + 1$$

with the initial conditions $y(0) = 0$ and $y(1) = 1$. Please find an explicit solution of this differential equation. (15 Points)

7. A complex function $f(z)$ is characterized by the formula $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, where $x$ and $y$ are real-valued variables and $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are real-valued functions. If $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$, please determine the general expression for $v(x,y)$ such that $f(z)$ is analytic inside the unit circle on the complex plane. (10 Points)

8. Suppose $n$ is a positive integer. Please determine all roots of the equation

$$[(z-1)^n - 1]\,[(z-1)^{3n} + (z-1)^{2n} + (z-1)^n + 1] = 0.$$

(10 Points)

9. A complex function $f(z)$ is defined by $f(z) = \frac{e^z}{(z^4+0.5z^3)}$. (a) Please determine residue of $f(z)$ at $z = 0$. (5 Points) (b) Please find residue of $f(z)$ at $z = -0.5$. (5 Points) (c) Please find $\oint_C f(z)dz$, where $C$ is a closed counterclockwise contour on the unit circle. (5 Points)

102

國立台灣科技大學九十六學年度碩士班招生試題

系所組別： 電子工程系碩士班乙三組

科　　目： 工程數學

總分100分

1. (8 points) Briefly answer the following questions. You will not get any credit if only the answer is given.

   (a) (4 points) Let $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, where $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, and $\mathbf{C}$ are $m \times n$, $n \times m$, and $m \times m$ matrices, respectively ($m > n$). Is $\mathbf{C}$ invertible? Briefly justify your answer.

   (b) (4 points) Let $\mathbf{D}$ be a $4 \times 4$ matrix with real entries. Suppose that the diagonal elements of $\mathbf{D}$ are all equal to 2, i.e. $d_{11} = d_{22} = d_{33} = d_{44} = 2$ and that $\mathbf{D}$ is singular. If we know one of its eigenvalue is $2 + i$, then determine the other three eigenvalues.

2. (8 points) Let matrix $\mathbf{A}$ be de given by

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) (4 points) Determine elementary matrices, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ such that $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\mathbf{A} = \mathbf{L}$, where $\mathbf{L}$ is a *lower triangular* matrix.

   (b) (4 points) From (a), factorize $\mathbf{A}$ as $\mathbf{A} = \mathbf{UL}$, where $\mathbf{U}$ is an *upper triangular* matrix and $\mathbf{L}$ is as given in (a).

3. (8 points) Consider a linear transformation $T$

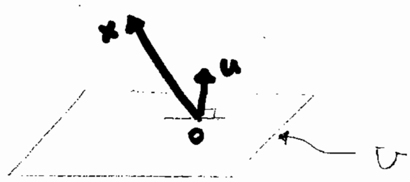
$$T \ : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^4$$

with

$$T\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_1 \\ a_1 + 2a_2 \\ a_2 + 2a_3 \\ a_3 + 2a_1 \end{bmatrix}$$

Is $T$ one-to-one? Does $T$ map $\mathcal{R}^3$ onto $\mathcal{R}^4$? Justify your answers.

4. (11 points) Let $\mathbf{u}$ be a unit column vector in $\mathcal{R}^3$ that is perpendicular to the plane $U$ which passes through the origin. Given a vector $\mathbf{x}$ as shown in the following figure.




Suppose that

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

where $\mathbf{I}$ is a $3 \times 3$ identity matrix.

   (a) (7 points) PLOT the vector $\mathbf{y}$, where $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$.

   (b) (4 points) Is $\mathbf{u}$ an eigenvector of $\mathbf{A}$? If no, explain why. If yes, determine the corresponding eigenvalue.

5. (15 points) Consider a differential equation of the form

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = e^t$$

with the initial condition $y(0) = 2$ and $y'(0) = 1$. Please find an explicit solution of this differential equation.

國立台灣科技大學九十六學年度碩士班招生試題

系所組別： 電子工程系碩士班乙三組

科　　目： 工程數學

6. **(15 Points)** A partial differential equation is defined as

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + 2u(x,y).$$

The boundary conditions of this partial differential equation is given by

$$u(x,0) = e^{x} + 2e^{-4x}.$$

Please find the solution of this partial differential equation.

7. **(15 Points)** It is a well-known fact that a complex-variable function $f(z)$ with well-defined derivative at a point $z = z_0$ may not be analytic at $z = z_0$. Please give such an example and verify the above property for this complex-variable function.

8. **(10 Points)** Suppose $n$ is a positive integer and $z_0$ is a complex constant. Please determine the residue of the function $e^{2z}/(z - z_0)^n$ at the pole $z = z_0$.

9. **(10 Points)** Please derive an explicit formula for computing $\sin^{-1}(z)$, where $z$ is a complex number.

國立台灣科技大學九十七學年度碩士班招生試題

系所組別： 電子工程系碩士班乙一組

科 目： 工程數學

總分 100 分

1. **(20 Points)** Briefly answer the following questions. You will not get any credit if only the answer is given. Each problem worths 4 points.

   (a) Let $\mathbf{A}$ be an $4 \times 4$ matrix which satisfies
   $$\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$$
   where $\mathbf{a}_i$ denotes the $i^{th}$ column of $\mathbf{A}$ and $\mathbf{0}$ is a $4 \times 1$ zero vector, then how many possible solutions will the system $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ have? Explain.

   (b) Let $\mathbf{B}$ be another $4 \times 4$ matrix, is $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ singular? Briefly justify your answer.

   (c) Determine the row echelon form of $\mathbf{xy}^T$, where $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are two nonzero (column) vectors in $\mathcal{R}^n$.

   (d) (c) continued. Determine the dimension of the null space of $\mathbf{xy}^T$.

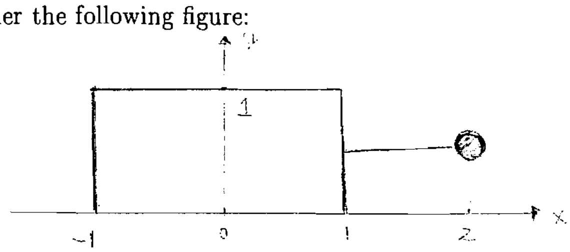
   (e) Find the inverse of the following block matrix
   $$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{H} \end{bmatrix}$$
   where $\mathbf{0}$ is an $n \times n$ zero matrix, $\mathbf{I}$ is an $n \times n$ identity matrix, and $\mathbf{H}$ is an $n \times n$ invertible matrix.

2. **(10 Points)** Let $\mathbf{P}_n$ denote an inner product space which consists of all polynomials of degree less than $n$ with the inner product defined as $\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$. Now suppose that $\mathsf{U}$ is the subspace of $\mathbf{P}_3$ which is given by
   $$\mathsf{U} = \{r(x) : r(0) = 0\}$$

   (a) **(5 Points)** Determine an *orthogonal* basis for $\mathsf{U}$.

   (b) **(5 Points)** Consider another subspace of $\mathbf{P}_3$ which is given by
   $$\mathsf{V} = \{t(x) : t(-1) = 0\}$$
   Determine $\dim(\mathsf{U} \cap \mathsf{V})$.

3. **(10 Points)** Consider the following figure:




   (a) **(5 Points)** If all the points in the above figure undergo the linear transformation of $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$. Plot the resulting figure.

   (b) **(5 Points)** Is the above linear transformation one-to-one? Is the above linear transformation onto? Justify your answer.

4. **(10 Points)** As we learned in Linear Algebra, the adjoint of an $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ is defined as
   $$\text{adj }\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$
   where $A_{ij}$ is the cofactor of $a_{ij}$. Also, it is known that the adjoint satisfies the property that $\mathbf{A} \cdot \text{adj }\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$. Now suppose that $\mathbf{A}$ has eigenvalues $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, then

   (a) **(5 Points)** Determine $\text{Trace}\big(\text{adj }\mathbf{A}\big)$ in terms of the eigenvalues of $\mathbf{A}$, where $\text{Trace}(\cdot)$ denotes the summation of the diagonal elements of the matrix inside.

   (b) **(5 Points)** Determine $\det\big(\text{adj }\mathbf{A}\big)$ in terms of the eigenvalues of $\mathbf{A}$.

國立台灣科技大學九十七學年度碩士班招生試題

系所組別： 電子工程系碩士班乙一組

科　　目： 工程數學

5. The random variable X is selected at random from the unit interval; the random variable Y is then selected at random from the interval (0,X). Find the cdf of Y.

(14%)

6. Let X be the input to a communication channel and let Y be the output. The input to channel is +1 volt or -1 volt with equal probability. The output of channel is the input plus a noise voltage N that is uniformly distributed in the interval from +2 volts to -2 volts. Find $P[X = +1, Y \leq 0]$ and the probability that Y is negative given that X is +1.

(14%)

7. A particle leaves the origin under the influence of the force of gravity and its initial velocity v forms an angle φ with the horizontal axis. The path of the particle reaches the ground at a distance

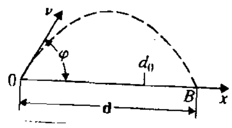
$$d = \frac{v^2}{g}\sin 2\varphi$$

from the origin (Fig 1 ). Assuming that φ is a random variable uniform between 0 and π/2, determine : the probability that $d \leq d_0$. (14%)

國立台灣科技大學九十七學年度碩士班招生試題

系所組別： 電子工程系碩士班乙一組

科　　目： 工程數學




(Fig1)

8. prove $f(x|\mathbf{X} \le a) = \frac{f(x)}{\int_{-\infty}^{a} f(x)dx}$ for $x < a$

And $f(x|b < \mathbf{X} \le a) = \frac{f(x)}{F(a)-F(b)}$ for $b \le x < a$

(8%)

# 台灣科技大學

# 電機工程系

# 91~97 學年度
# 工程數學考古題

國立臺灣科技大學
九十一學年度碩士班招生考試試題
系所組別： 電機工程系甲組、電機工程系乙二組
科　目： 工程數學

（共六題；滿分 100 分）

1. Let $\mathbf{F} = (yze^{xyz} - 4x)\hat{a}_x + (xze^{xyz} + z)\hat{a}_y + (xye^{xyz} + y)\hat{a}_z$ for all $x, y$ and $z$.
   (a) Verify that $\mathbf{F}$ is conservative. (5%)
   (b) Find a potential function for $\mathbf{F}$. (10%)

2. Let $g$ be a periodic function defined by
   $g(t) = t^2$ for $0 < t < 3$ and $g(t+3) = g(t)$ for all $t$.
   (a) Draw the graph of $g$ for $-6<t<6$. (5%)
   (b) Compute the Fourier series of $g$. (10%)
   (c) Draw the amplitude spectrum of $g$ for the three lowest-frequency components. (5%)

3. Evaluate $\oint_C 1/(1+z^2)\,dz$ if $C$ is any piecewise-smooth simple closed curve in the complex plane. Consider all possible cases, which do not pass through $i$ or $-i$. (15%)

4. Find the general solution $y(x)$ to

$$y'' - 8y' + 16y = 8\sin(2x) + 3e^{4x}. \quad (15\%)$$

5. Solve the initial value problem for $y(t)$ with Laplace transform:

$$y'' + 2ty' - 4y = 1; \quad y(0) = y'(0) = 0. \quad (10\%)$$

6. Use the matrix exponential to solve the following initial value problems:

$$\tfrac{d}{dt}\mathrm{Y}(t) = A\mathrm{Y}(t), \quad \mathrm{Y}(0) = \mathrm{Y}_0.$$

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Y}_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, and $\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ (15%)

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Y}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, and $\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ (10%)

國立臺灣科技大學
九十二學年度碩士班招生考試試題
系所組別：電機工程系碩士班乙一組
科　目：　工程數學

(共九題；滿分一百分)

1. Consider a differential equation as $\frac{dP}{dt} = P(t)(c_1 - c_2 P(t))$, where $c_1$ and $c_2$ are constants. Find the solution for the differential equation given $P(0)=P_0$. (10 points)

2. If both $\mu_1(x,y) = xy$ and $\mu_2(x,y) = (x^2 + y^2)^{-1}$ are integrating factors for the differential equation $y' = f(x,y)$, then what is $f(x,y)$? (10 points)

3. Let $\Phi(x)$ and $\Psi(x)$ be linearly independent solutions of $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ on an open interval *I*. Assume that $p(x)$ and $q(x)$ are continuous on *I*. Then prove that between two consecutive zeros of $\Phi(x)$, there always exists exact one zero for $\Psi(x)$. (15 points)

4. Solve $-t(1+t)y'' + 2y' + 2y = 6(t+1)$; $y(-1) = y(1) = 0$. (15 points)

國立臺灣科技大學
九十二學年度碩士班招生考試試題
系所組別：電機工程系碩士班乙一組
科　目：工程數學

**5.** Describe all solutions of $Ax=0$ in a parametric vector form, where $A$ is the following matrix. (10%)

$$A=\begin{bmatrix}1 & -5 & 0 & 2 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

**6.** Find the inverse matrix of the following matrix, if it exists. (10%)

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

**7.** Given a matrix with its row equivalent matrix shown below, decide bases for $Col\ A$ and $Nul\ A$. (10%)

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 5\\ -2 & 6 & 0 & -3\\ 4 & -12 & -4 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -3 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 4 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

**8.** Let $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ and $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ be bases for the vector space $V$, and suppose that $a_1=4b_1-b_2$, $a_2=-b_1+b_2+b_3$, and $a_3=b_2-2b_3$.

(a) Find the change-of-coordinate matrix from $A$ to $B$. (5%)

(b) Find $[x]_B$ for $x=3a_1+4a_2+a_3$. (5%)

**9.** Define $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ by $T(x)=Ax$, where $A=\begin{bmatrix}7 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$. Find a base $B$ for $\mathbb{R}^2$ with the property that the $B$-matrix of $T$ is a diagonal matrix. (10%)

國立臺灣科技大學
九十三學年度碩士班招生考試試題

系所組別：電機工程系乙一組
科　　目：工程數學

總分 100 分

1. (15%) Solve the following systems

$$x'' - 2x' + 3y' + 2y = 4$$
$$2y' - x' + 3y = 0$$
$$x(0) = x'(0) = y(0) = 0$$

2. (15%) Find the general solution of

$$y'' - 3y' + 2y = 2x + 8\sin(2x)$$

3. (10%) For the following equation, write out the first six nonzero terms of a series solution about 0.

$$y'' - 2y' + x^3 y = 0$$

4. (10%) Solve the following equation

$$y' = -\frac{1}{x}y^2 + \frac{2}{x}y; \qquad y(1) = 4$$

國立臺灣科技大學
九十三學年度碩士班招生考試試題

系所組別：電機工程系乙一組
科　　目：工程數學

5. (10%) Let $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ be a linear transformation such that

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, -x_1 - 3x_2, -3x_1 - 2x_2)$$

Find $x \in \mathbb{R}^2$ such that $T(x) = (-4, 7, 0)$.

6. (10% with 5% each) Let $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be the transformation that rotates each point in $\mathbb{R}^2$ about the origin through an angle $\varphi$, with counterclockwise rotation for a positive angle.

   (a) Find the standard matrix $A$ of this rotation.

   (b) Express the matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, where $a$ and $b$ are both real numbers, in terms of a rotation transformation.

7. (10%) The set $B = \{1+t^2, t+t^2, 1+2t+t^2\}$ is a basis for the vector space $P_2$ of polynomials up to the second order. Find the coordinate vector of $P(t) = 1+4t+7t^2$ relative to $B$.

8. (20%, with 10% each.) Find the invertible matrix $P$ and matrix $C$ of the form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ for the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

such that the given matrix has the form of $A = PCP^{-1}$.

(a) What is the matrix $P$?

(b) What is the matrix $C$?

國立臺灣科技大學
九十四學年度碩士班招生考試試題
系所組別：電機工程系碩士班甲組、電機工程系碩士班乙二組
科　　目：工程數學

題目共 2 頁， 8 題，總分 100 分，各題分數如示。

(1) Find the general solution for the following equation:
$y^{(7)}+18y^{(5)}+81y'''=0$ (15%)

(2) Find the Fourier transform for the following function:

$h(t)=\int_{-\infty}^{t} g(x)dx$ (10%)

(3) Let $u(t)$ denote the unit step function, find the Laplace transform for the following function:

$$f(x)=\sin\left[3\left(4t-\frac{\pi}{6}\right)\right]u(4t-6\pi) \quad (10\%)$$

(4) Consider the symmetric matrix $A=\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$, find its orthogonal diagonalizing matrix Q. (15%)

116

國立臺灣科技大學
九十四學年度碩士班招生考試試題

系所組別：電機工程系碩士班甲組、電機工程系碩士班乙二組
科　　目：工程數學

5. Calculate the complex variable integral $\oint_C \frac{\sin 2z}{(z+3)(z+2)^2} dz$, where C is a clockwise rectangular contour with vertices at 3+i, -2.5+i, -2.5-i, 3-i. (10%)

6. Solve the complex quadratic equation $z^2-(4+i)z+(8+i)=0$. (10%)

7. Verify the Stokes's theorem by the vector function $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$, where $\vec{i}$, $\vec{j}$, and $\vec{k}$ are the mutual orthogonal unit vectors in the x-y-z coordinate system, by the unit circle $x^2+y^2=1$ in the x-y plane. (15%)

8. Let $f(x,y,z)=2x+yz-3y^2$ and $\vec{F}$ is the gradient of $f$. Calculate the line integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$, where C is the quarter circle from A to B as show in Figure P8. (15%)

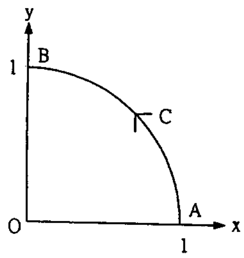



Figure P8

117

國立台灣科技大學九十五學年度碩士班招生試題

系所組別：電機工程系碩士班甲組、乙二組

科　　目：工程數學

總分100分

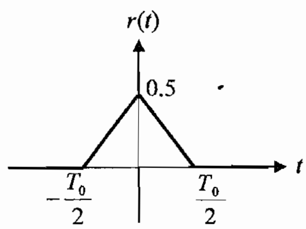
(1) Solve the following differential equation:

$$y'' - 2y' + y = e^x + x \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \qquad (15\%)$$

(2) Solve the initial-value problem:

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (15\%)$$

(3) (a) Find the Fourier Transform for the following function: (10%)




(b) Let $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$, find the inverse Laplace trnasform $f(t)$.

(10%)

4. Evaluate the complex integral $\oint_C \tan z\,dz$ for the contour C in the circle $|z| = 3$. (15%)

5. Evaluate $\int_C (x-1)yz\,dx + \cos(yz)\,dy + x(z-1)\,dz$, where C is straight-line segment from $(1,1,1)$ to $(-2,1,3)$. (15%)

6. Let V describe the region bounded by the hemisphere $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$, $2 \le z \le 5$, and the plane $z = 2$. Please verify the divergence theorem if $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z-2)\vec{k}$. (20%)

109

國立台灣科技大學九十七學年度碩士班招生試題

系所組別： 電機工程系碩士班己組

科　　目： 工程數學

總分 100 分

(1) Find a unit normal vector **n** on the plane $4x^2+y^2=z$ at the point $(1,-2,8)$. (16%)

(2) Evaluate the integral $\oint_C \frac{1}{z^2(z-2i)}dz$ where C is (a) $|z-1|=1$, (b) $|z-1|=2$, (c) $|z-1|=3$. (18%)

(3) Find the probability of $P(x>V)$ for a Rayleigh distribution $p(x)=\frac{x}{\psi}e^{-x^2/2\psi}, x\ge 0$. (16%)

(4) Given $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Find a basis for the nullspace of $A$. (8%)

(b) Given that $\{(2,1,0,-5)^T,(-1,2,5,0)^T\}$ is an orthogonal basis for the column space of $A^T$, find the vector in the column space of $A^T$ that is closest to $(-1,0,0,1)^T$. (12%)

(5) Find the inverse Laplace transform of $Y(s)=\frac{2}{s^3(s+2)^2}$. (15%)

(6) Given the Fourier transform pair: $x(t)\leftrightarrow X(\omega)$, derive the Fourier transform of $x(at)$. Also find $X(\omega)$ when $x(t)=e^{-c|t|}$ where $c>0$. (15%)

# 台灣科技大學

# 營建工程系

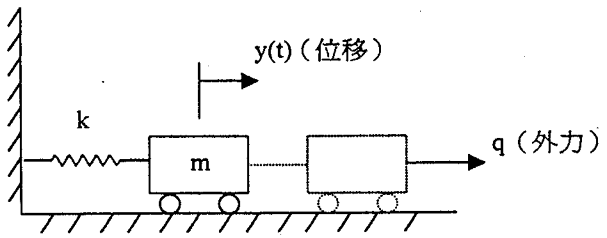
# 91~97 學年度
# 工程數學考古題

國立臺灣科技大學
九十一學年度碩士班招生考試試題

系所組別： 營建工程系乙組
科　目： 工程數學

注意：本試題總分 100 分，共四大題，每大題各有兩小題，配分詳題末標示。

一、有一個物體承受大小爲 q 之外力作用而達靜態平衡之情形如下圖：



不計摩擦力

放掉外力後此物體自由震動之方程式爲：

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+ky(t)=0$$

其中 y(t)=位移函數，t=時間，m=質量，k=彈簧常數。

(1) 試求此物體第一次回到「未受力前之位置」的時間爲何？ (15%)

(2) 考慮摩擦力之影響時其運動方程式可修正爲：

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+c\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=0$$

若知 $c=2\sqrt{km}$ ，其他符號的定義如前所述。試寫出通解 y(t)之數學式（不須解出待定係數），並扼要陳述在題(2)條件下之物體運動特性。 (10%)

二、應用向量分析和矩陣運算方法求解下列兩題：

(1) 有一傾斜群樁，樁帽上承受之總力爲 $\vec{F}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$ ，單位爲 MN。樁群由甲、乙、丙三根樁所組成，其中甲樁之方向向量爲 $\vec{r}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ 。試求樁帽總力在甲樁方向之分力向量爲何？ (15%)

(2) 若知各樁之樁頭軸力可由下列聯立方程式求解：**AP = B**，

其中，軸力矩陣 $P=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{bmatrix}$ ，矩陣 $A=\begin{bmatrix}4&2&1\\2&3&1\\0&1&2\end{bmatrix}$ ，矩陣 $B=\begin{bmatrix}3\\-2\\6\end{bmatrix}$ 。

試求 **A** 之反矩陣，再求軸力矩陣 **P**。 (10%)

305201



國立臺灣科技大學
九十一學年度碩士班招生考試試題

系所組別： 營建工程系乙組
科　目： 工程數學

三、請回答下列有關向量之微積分問題：

(1) 試以混凝土擋水壩下方之土層滲流問題爲例，說明何謂「向量場(vector field)」和「流線(streamline)」，並說明兩者之相互關係。 (15%)

(2) 以作用力：$\bar{F} = x\bar{i} + \bar{j} + z\bar{k}$，將一個物體沿著空間中的一個曲線 C 移動，

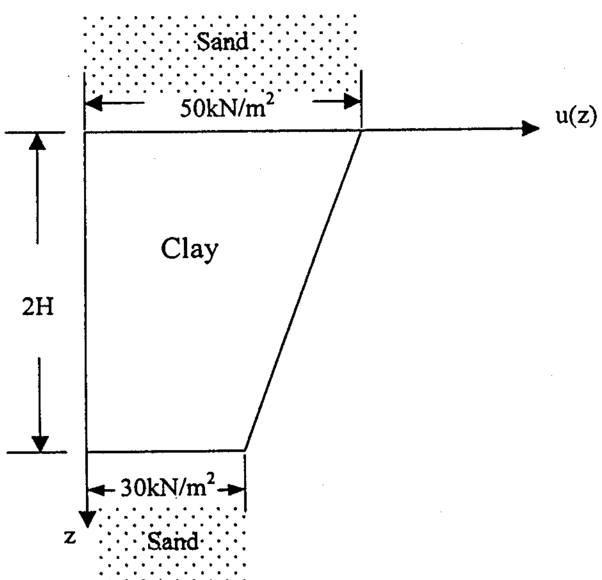
曲線 C 的參數方程式爲：$x = t,\ y = t,\ z = t^3$；$0 \le t \le 1$

求此力所作的功爲何？ (10%)

四、有一黏土層厚度爲 2H，孔隙水壓呈線性分佈，頂部爲 50 kN/m$^2$，底部爲 30 kN/m$^2$，如下圖所示。

(1) 試求孔隙水壓分佈之富氏正弦級數(Fourier sine series)？ (15%)

(2) 取富氏正弦級數之前五項計算並作圖，然後再與實際值比較。(10%)



國立臺灣科技大學
九十二學年度碩士班招生考試試題
系所組別：營建工程系碩士班乙組
科　目：工程數學

注意：本試題總分 100 分，共四大題，每大題各有兩小題，配分詳題末標示。

一、有一微分方程式如下：

$$x^2y''-2xy'+2y=10\sin(\ln x)$$

其中，$x>0$，$y'=\dfrac{dy}{dx}$，$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$，ln 爲自然對數。

(1) 試用變數轉換法令 $z=\ln x$，將原方程式轉換爲以 $z$ 爲自變數之「常係數微分方程式」。 **(10%)**

(2) 續上題，若知 $x$=1 時，$y(x)=3$，$y'(x)=0$，試求其解 $y(x)=?$ **(15%)**

二、線性聯立方程式之矩陣式爲：**AX = B**

其中，$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & k^2-5\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ k\end{bmatrix}$

(1) 若此聯立方程式有唯一解，則 $k$ 值爲何？ **(10%)**

(2) 若 $k=3$，試求 A 之反矩陣？ **(15%)**

三、定義單位階梯函數(unit step function)如下：

$$u(t-a)=0 \text{ if } t<a$$
$$u(t-a)=1 \text{ if } t\ge a$$

(1) 已知函數 $f(t)=2t[1-u(t-2)]-2(t-4)[u(t-2)-u(t-4)]$，試求 $f(t)$ 的拉普拉氏轉換，$L[f(t)]=?$。 **(10%)**（提示：$L[u(t-a)y(t)]=e^{-as}L[y(t+a)]$）

(2) 試以二階微分方程式爲例，簡要說明如何應用拉普拉氏轉換來求解，並舉出較適合應用此法求解之微分方程式類型？ **(15%)**

四、有一偏微分方程式如下所示：$\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$；其中，$0\le z\le 2H$，$t\ge 0$，$a$ 爲常係數。應用變數分離法及已知之邊界條件求得其解爲：

$$u(z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi z}{2H}\right)\ \exp\left(\frac{-n^2\pi^2a^2t}{4H^2}\right)$$；其中 exp 代表指數函數。

(1) 試根據初始條件：$u(z,0)=u_0$，求待定係數 $A_n=?$ **(15%)**

(2) 試舉出一個應用此種偏微分方程式求解的大地工程問題，並說明在你所舉出的問題中係數 $a$ 的物理意義爲何？**(10%)**

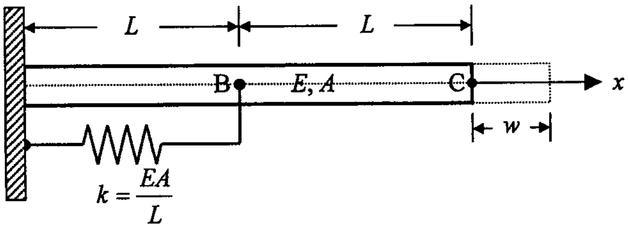
國立臺灣科技大學
九十三學年度碩士班考試試題
系所組別：營建工程系乙組、營建工程系丙組、營建工程系戊二組
科　　目：工程數學

注意: 本試題總分 100 分

一、令 $L[\bullet]$ 爲 Laplace Transform 運算符號。

(1) 試解 $L[y(t)\,\delta(t-a)]$，其中 $\delta(\bullet)$ 爲 Dirac Delta 函數，$a>0$。 **(5%)**

(2) 一長爲 $2L$、斷面積爲 $A$、彈性模數爲 $E$ 之均質軸向桿件如圖示，其中桿件左端點爲固定端，B 點處有一彈簧聯結至固定端且彈簧之彈性係數爲 $k = EA/L$。令桿件之軸向變位函數爲 $u(x)$，並假設桿件在 C 點處於承受某外力作用後產生 $w$ 之位移即 $u(2L)=w$，試以 Laplace Transform 法求解桿件之軸向變位 $u(x)$。(提示: $L[f(t-a)H(t-a)] = e^{-as}L[f(t)]$，其中 $H(\bullet)$ 爲 Heaviside Step function) **(20%)**

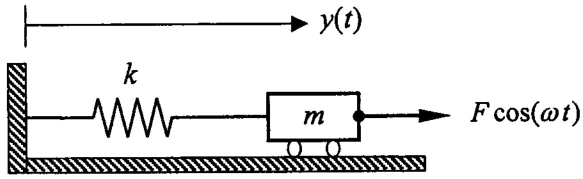



二、試解 $(2x+1)^2 y''(x) + (10x+5)y'(x) + 3y(x) = 0$ 之通解(general solution)。**(20%)**

三、一彈簧-質量塊系統(質量爲 $m$，彈簧彈性係數爲 $k$)承受外力 $F\cos(\omega t)$ 之作用如圖所示，

(1) 請陳述 $m, k$ 與 $\omega$ 之關係式可使系統形成共振現象。 **(5%)**

(2) 令 $y(0)=y'(0)=0$，試求在共振條件下之位移反應 $y(t)$。 **(15%)**

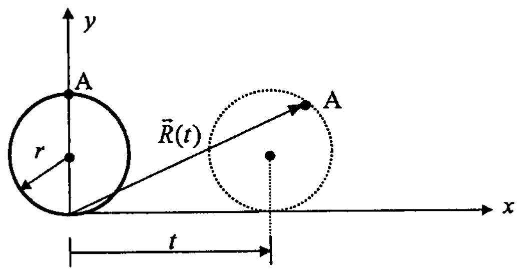



四、一半徑爲 $r$ 之圓形滾輪沿地板滾動前進如圖所示，設滾輪與地板間無滑動且滾輪中心點以等速前行。

(1) 當 $t=0$ 時，A 點恰位於滾輪之正上方，試求 A 點之位置向量(position vector)

$\vec{R}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$ **(5%)**

(2) 試求當 $t$ 由 0 增加至 $2\pi r$ 後，A 點總共行走之距離 $S$。 **(10%)**




五、已知一 3×3 矩陣 $A$ 具有 3 個相異特徵值(eigen-value)，吾人利用三正交單位向量 $\vec{u}_1$、$\vec{u}_2$ 及 $\vec{u}_3$ 對矩陣 $A$ 進行測試而得下列結果: $A\vec{u}_1 = \vec{u}_1$、$A\vec{u}_2 = \frac{8}{3}\vec{u}_2 - \frac{2}{3}\vec{u}_3$ 及 $A\vec{u}_3 = -\frac{1}{3}\vec{u}_2 + \frac{7}{3}\vec{u}_3$，

(1) 試求 A 之所有特徵值，並以 $\vec{u}_1$、$\vec{u}_2$ 及 $\vec{u}_3$ 表示其對應之特徵向量(eigen-vector)。**(15%)**

(2) 試求 $\lim_{n\to\infty}(A^{-1})^n$，其中 (-1)代表反矩陣符號。**(5%)**

國立臺灣科技大學

九十四學年度碩士班招生考試試題

系所組別：營建工程系碩士班乙組、營建工程系碩士班丙組、營建工程系碩士班戊組

科　　目：工程數學

注意: 本試題總分 100 分

一、一微分方程式爲 $3x^2 + xy^{\alpha} - x^2 y^{\alpha-1}\dfrac{dy}{dx} = 0$。

(1)試求參數 $\alpha$ 可使其成爲正合方程式(Exact Differential Equation)。 **(5%)**

(2)試根據(1)之結果求微分方程式之解 $y(x)$。 **(10%)**

二、令函數 $f(t)$ 之 Laplace Transform 運算可表爲 $L[f(t)] = F(s)$，

且其逆轉換(Inverse Laplace Transform) 運算爲 $L^{-1}[F(s)] = f(t)$。

(1) 試求 $L^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4s+20}\right]$。 **(5%)**

(2) 試求 $L^{-1}\left[\dfrac{s}{s+1}\right]$。 **(5%)**

(3) 試以 Laplace Transform 解 $y'(t) - 4y(t) = 1;\ \underline{y(1) = 0}$，$t \geq 0$ (註:其他方法不予計分)。**(10%)**

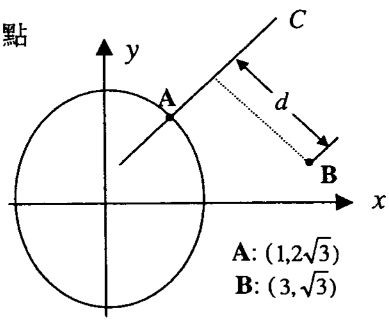
三、一橢圓之方程式爲 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 4$，令 $C$ 爲通過橢圓上 **A** 點

( 座標爲$(1, 2\sqrt{3})$ ) 之法線(Normal Line) 如附圖所示，

(1) 試求法線 $C$ 之方程式。 **(5%)**

(2) 試求橢圓外之 **B** 點 ( 座標爲$(3, \sqrt{3})$ )

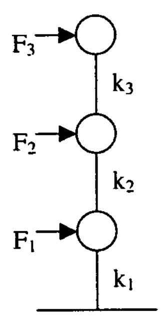
與此法線 $C$ 之最近距離 $d$。**(10%)**




四、考慮附圖中之簡化結構物模型，其中 $k_1, k_2, k_3$ 爲第一至三樓之樓間勁度，且 $k_1 = 2$ N/m，

$k_2 = k_3 = 1$ N/m。若 $F_1, F_2, F_3$ 分別爲作用於第一至三樓之力，則此三層樓之變形與作用力之關係如下：

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}}_{K}\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}}_{F} \qquad \text{或} \quad KU = F$$




其中 $u_1, u_2, u_3$ 爲第一至三樓之絕對位移。

(1) 試求出 $K$ 方陣之特徵值(Eigen-values)及特徵向量(Eigen-vectors)。**(10%)**

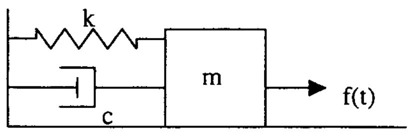
(2) 求出 $K$ 之反矩陣 $K^{-1}$，並解出當 $F_1 = F_2 = F_3 = 1$ N 時各層樓之變形 $u_1, u_2, u_3$。**(5%)**

53

國立臺灣科技大學
九十四學年度碩士班招生考試試題
系所組別：營建工程系碩士班乙組、營建工程系碩士班丙組、營建工程系碩士班戊組
科　　目：工程數學

五、考慮附圖中之單自由度系統，

此系統於外力 $f(t)$作用下之運動方程式如下：



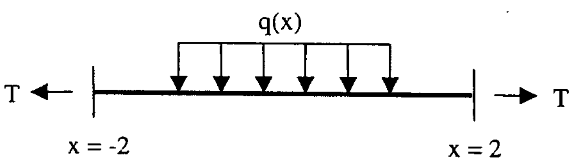

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+c\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

其中 $t$ 是時間，$m, c, k$ 分別是該系統之質量，阻尼及勁度，$x(t)$是系統之位移。

(1) 若 $m = 1, c = 1, k = 1$，該系統初始狀態爲 $x(0) = 1, dx(0)/dt = 0$（初速度爲零），在無外力作用下（$f(t) = 0$），求該系統之位移反應 $x(t),\ t \ge 0$。**(10%)**

(2) 若 $m = 1, c = 0, k = 1$，系統初始狀態爲 $x(0) = 0, dx(0)/dt = 0$，外力作用爲 $f(t) = \sin(\omega t)$，試問 $\omega$ 爲何值時該系統會形成共振現象？並解出在此共振現象下之位移反應 $x(t)$。**(10%)**

六、 考慮下圖中之繩索：




該繩索在受到拉力 $T$ 及垂直荷重 $q(x)$作用下之垂直變形之方程式爲

$$T\frac{d^2y(x)}{dx^2}=q(x)$$

其中 $y(x)$是此繩索之垂直變形。此繩索之左右兩端分別固定在 $x = -2$ 及 $x = 2$ 之位置，在此二位置該繩索之垂直變形爲零即 $y(-2) = y(2) = 0$。垂直荷重 $q(x)$之分佈如下：

$$q(x)=\begin{cases}1 & -1\le x\le 1\\ 0 & 1\le x\le 2,-2\le x\le -1\end{cases}$$

(1) 試求出 $q(x)$之富立葉級數（Fourier Series）。**(5%)**

(2) 若 $T = 1$，利用(1)之結果，求出此繩索垂直變形 $y(x)$。**(10%)**



54

國立台灣科技大學九十五學年度碩士班招生試題

系所組別： 營建工程系碩士班乙組、丙組、戊組

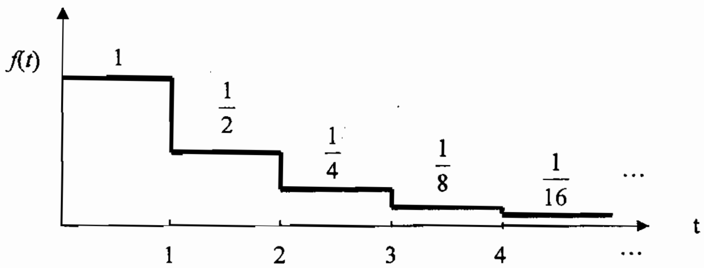
科　　目： 工程數學

注意: 本試題總分 100 分

一、 (1) 試以 Laplace Transform 法求解 $y''(x)+y(x)=1$; $y(0)=0$, $y(1)=1$。 **(10%)**

(2) 已知 $f(t)$ 爲一無窮遞減函數如圖所示，

試求 $f(t)$ 之 Laplace Transform $L[f(t)]$。(註:答案須化成最簡型式) **(10%)**




二、 試解一階微分方程: $y'(x)=\dfrac{x-y+2}{x-y+3}$。**(15%)**

三、 一平面曲線 $C$ 之方程式爲 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=4$; $y>0$，已知曲線 $C$ 之一切線恰好通過座標爲(4,0)之 P 點，試求此切線方程式及切點座標。**(15%)**

四、 已知方陣 A 爲

$$A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2 & 0\\ 0.2 & 0.6 & 0.2\\ 0 & 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$$

(1) 寫出特徵多項式 **(1%)**

(2) 求特徵值及特徵向量 **(5%)**

(3) 將該方陣做對角化之分解 **(2%)**

(4) 求出 $A^{\infty}$ **(5%)**

(5) 求此方陣的行列式 **(2%)**

五、 考慮以下二階常微分方程式

(1) 求 $y''+y'+y=x$ 之通解 **(5%)**

(2) 試解初始値問題 $y''+2y'+y=1$; $y(0)=1, y'(0)=2$ **(7%)**

(3) 以上二微分方程式爲過阻尼、欠阻尼或臨界阻尼？請說明之 **(3%)**

六、 考慮以下定義於[0,π]區間的函數

$$f(x)=\begin{cases}0 & 1\le x\le \pi\\ 1 & 0\le x<1\end{cases}$$

(1) 求此函數之傅立葉正弦級數(Fourier sine series) **(6%)**

(2) 求此函數之傅立葉餘弦級數(Fourier cosine series) **(6%)**

(3) 試分別求(1)與(2)所得到的級數，在 x = 0 及 x = π之收斂値？ **(5%)**

(4) 若針對此函數在[0,π]區間作微分，產生出的函數之傅立葉級數是否一定存在？針對此函數在[0,π]區間作積分，產生出的函數之傅立葉級數是否一定存在？請說明之 **(3%)**

54

國立台灣科技大學九十六學年度碩士班招生試題

系所組別： 營建工程系碩士班乙組、丙組、戊組

科　　目： 工程數學

注意: 本試題總分 100 分

一、試解下列初始值問題之解 $y(x)$。 (15%)

$y'(x)+y(x)\tan x=\sin(2x);\quad y(0)=1$。

二、令函數 $f(t)$ 之 Laplace Transform 運算可表爲 $L[f(t)]=F(s)$，

且其逆轉換(Inverse Laplace Transform) 運算表爲 $L^{-1}[F(s)]=f(t)$。

(1) 試求 $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+1)}\right]$。 (5%)

(2) 試求 $L^{-1}\left[\dfrac{s}{s+2}\right]$。 (5%)

(3) 試求 $L^{-1}[\ln(s)]$。 (5%)

(4) 試以 Laplace Transform 解 $y'(t)+y(t)=1;\ y(0)=0$，$t\geq 0$ (註:其他方法不予計分) 。(5%)

三、已知一曲線 $C$ 之參數表示爲 $C: x(t)=2\cos(t),\ y(t)=2\sin(t),\ z=2,\ 0\leq t\leq \dfrac{\pi}{2}$，

且此曲線之質量密度函數(mass density function)爲 $\rho(x,y,z)=xy$ (g/cm)，

(1) 試以 $x$-$y$-$z$ 之三軸空間圖，概繪曲線 $C$。 (3%)

(2) 試求曲線 $C$ 之總質量 $m$。 (6%)

(3) 試求曲線 $C$ 之質量中心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$。 (6%)

四、考慮以下單自由度系統

$my''(t)+cy'(t)+ky(t)=f(t)$

其中質量 $m=10$ kg，彈力係數 $k=40$ N/m。回答下列問題：

(1) 若阻尼係數 $c=10$ N·second/m，請問該系統之阻尼比（= 阻尼／臨界阻尼）爲多少？此爲過阻尼或欠阻尼系統？（3%）

(2) 若阻尼係數 $c=10$ N·second/m，且無外力作用 $f(t)=0$，在 $y(0)=1,\ y'(0)=0$ 之初始狀態下，系統之反應 $y(t)$ 爲何？（9%）

(3) 若阻尼係數 $c=0$ N·second/m，請問該系統之共振頻率爲何（請註明單位）？（3%）

| 國立台灣科技大學九十六學年度碩士班招生試題 |
| --- |
| 系所組別： 營建工程系碩士班乙組、丙組、戊組 |
| 科　　目： 工程數學 |

五、考慮以下方陣

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

(1) 求此方陣之所有固有值（eigenvalue）與相對應之固有向量（eigenvector）。(**10%**)

(2) 若 $B=U^{-1}AU$ ，其中 $U$ 爲任意的非奇異（non-singular）的 $3\times3$ 方陣，請問 $B$ 方陣之行列式（determinant）是多少？$B$ 方陣對角線之總和是多少？（**6%**）

(3) 若 $B=UAU^{T}$ ，其中 $U$ 爲任意 $2\times3$ 方陣且 $U$ 的秩（rank）爲 2，$U^{T}$ 爲 $U$ 之轉置矩陣，請問 $B$ 方陣之秩是多少？（**2%**）

六、$f(t)$ 函數之傅立葉轉換（Fourier transform）定義爲 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$

考慮以下微分方程式

$y'(t)+2y(t)=g(t)$

(1) 若 $g(t)=\delta(t)$（$\delta(t)$ 是德瑞克函數 Dirac Delta function），請以傅立葉正轉換與反轉換求出系統之反應 $y(t)$ 。(**7%**)

(2) 若 $g(t)=e^{-t}H(t)$ （$H(t)$ 是 Heaviside 函數），系統之反應 $y(t)$ 等於 $e^{-t}H(t)$ 與某一函數 $R(t)$ 之摺積（convolution），請問此 $R(t)$ 函數爲何？（**5%**）

(3) 若 $g(t)=e^{t}H(t)$ ，請問系統反應 $y(t)$ 之傅立葉轉換 $Y(\omega)$ 爲何？（**5%**）

國立台灣科技大學九十七學年度碩士班招生試題

系所組別： 營建工程系碩士班乙組、丙組、戊組

科　　目： 工程數學

注意: 本試題總分 100 分

一、一微分方程式爲 $3y^4-1+12xy^3\dfrac{dy}{dx}=0$。

(1)試判斷其是否爲正合方程式(Exact Differential Equation)。 **(5%)**

(2)令 $y(2)=1$，試根據(1)之結果求微分方程式之解 $y(x)$。 **(10%)**

二、令函數 $f(t)$ 之 Laplace Transform 運算可表爲 $L[f(t)]=F(s)$，

且其逆轉換(Inverse Laplace Transform) 運算爲 $L^{-1}[F(s)]=f(t)$。

(1) 令 $f(t)=\begin{cases}0 & ;t<2\\(t-1)^2 & ;t\geq 2\end{cases}$，試求 $L[f(t)]$。 **(8%)**

(2)試以 Laplace Transform 求解 $y'''(t)+3y''(t)+3y'(t)+y(t)=\delta(t)$;其中 $\delta(t)$ 爲 Dirac delta function，$y(0)=y'(0)=y''(0)=0$，$t\geq 0$ (註:其他方法不予計分) 。**(7%)**

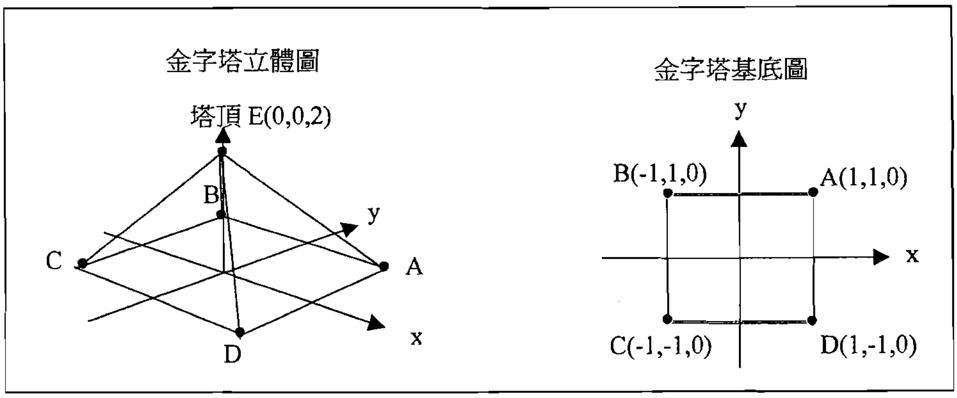
三、一 3-D 向量場爲 $\mathbf{F}=-2x\mathbf{i}-ze^{x}\mathbf{j}+(2z-1)\mathbf{k}$

(1) 試求 $\mathbf{F}$ 之 divergence $\nabla\bullet\mathbf{F}$。 **(5%)**

(2) 試求 $\mathbf{F}$ 之 curl $\nabla\times\mathbf{F}$。**(5%)**

(3) 試求面積分 $I=\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet\mathbf{N}\,d\sigma$ 之值，其中 $\Sigma$ 爲圖中金字塔上部 4 個斜面

(即面 AED，面 DEC，面 CEB，面 BEA 之組合)，$\mathbf{N}$ 爲各斜面之朝外單位法向量。**(10%)**



國立台灣科技大學九十七學年度碩士班招生試題

系所組別： 營建工程系碩士班乙組、丙組、戊組

科　　目： 工程數學

四、

(1) A 爲一個 2 x 2 矩陣，若已知 A 滿足

$$A\cdot\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}$$

請列舉 A 的一個特徵向量，並請問該特徵向量之特徵值是多少？**(5%)**

(2) 同四(1)小題中之 A 矩陣，請問$[-4\ -2]^T$是否爲 A 之特徵向量？若是，請問其特徵值是多少？若不是，請說明爲什麼？**(5%)**

(3) 已知 B 矩陣之特徵向量是$[1\ 1]^T$與$[1\ -1]^T$，且相對應之特徵值分別爲 1 與 2，試求 B 矩陣？**(7%)**

(4) 若

$$C=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$$

其中$\alpha+\gamma=1$且$\beta+\delta=1$，試證明數字"1"必爲 C 矩陣的一個特徵值。 **(6%)**

五、

(1) 若$f(x)$爲以下函數

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ 1 & 0\le x\le\pi\\ 0 & |x|>\pi\end{cases}$$

試以傅立葉級數(Fourier series)在$[-\pi,\pi]$區間中展開$f(x)$函數。 **(8%)**

(2) 在題五(1)中的傅立葉級數稱爲 $g(x)$，試問 $g(0)$=？，$g(\pi)$ =？，$g(0)$是否與$f(0)$相等？$g(\pi)$是否與$f(\pi)$相等？爲什麼？**(7%)**

六、

(1) 若一動態系統之反應 $y(t)$滿足

$$y''(t)+9y(t)=f(t)$$

其中 $t$ 是時間，而$f(t)$是系統的輸入，請問該系統之共振頻率 (單位 Hz)？**(5%)**

(2) 同六(1)，試問當$f(t)$爲以下之那些函數時，會發生共振現象？可能單選或複選。 **(7%)**

A. $f(t)=\sin(9t)$

B. $f(t)=\cos(3t)$

C. $f(t)=e^{-3t}$

D. $f(t)=e^{-3it}$ $(i=\sqrt{-1})$