

崑山科技大學

電子工程研究所

91~96 學年度

工程數學考古題

崑山科技大學九十一學年度碩士班招生考試

所別：電子工程研究所

考試科目：工程數學

說明：考生作答前，請先核對試題、答案卷（試卷）與准考證上之系所組別與考試科目是否相符。本試題卷之試題類別有選擇題（部分單選，部分複選）、填充題、計算證明題等三大類。

一、選擇題(每題五分)(25%)：部分單選，部分複選。

_____ 1. 若 A,B,C 為三矩陣，下列敘述何者為真？

- (a) $AB=BA$ ； (b) $AB=AC$ ，則 $B=C$ ； (c) $AB=0$ ，則 $A=0$ 或 $B=0$ ；
 (d) 行列式之值恆為正； (e) 行列式不等於零，則反矩陣一定存在。

_____ 2. 下列函數那些在 $x=0$ 時，其值不為零？($J_n(x)$ 是 Bessel 函數， $P_n(x)$ 是 Legendre 函數)

- (a) $J_0(x)$ ； (b) $J_1(x)$ ； (c) $P_0(x)$ ； (d) $P_1(x)$ ； (e) $J_{1/2}(x)$ 。

_____ 3. 下列何種函數之 Laplace transform 不存在？

- (a) e^{2t} ； (b) $t^{\frac{1}{2}}$ ； (c) $\ln t$ ； (d) $\sin \sqrt{t}$ ； (e) e^{t^2} 。

_____ 4. 若矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ，求 Rank(A)。

- (a) 2； (b) 3； (c) 4； (d) 5； (e) 1。

_____ 5. $\int_0^{\infty} \cos 2t \cdot e^{-3t} dt = ?$

- (a) 0； (b) $\frac{2}{13}$ ； (c) $\frac{3}{13}$ ； (d) $\frac{6}{13}$ ； (e) $\frac{13}{2}$

二、填充題(35%)

1. 若 A 與 B 為 3x3 矩陣，若 $\det(A) = 4$ 且 $\det(B) = 5$ 。求

- (a) $\det(3AB) = \underline{\hspace{2cm}}$ ； (b) $\det(A^{-1}B^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 解下列微分方程式：

(a) $\frac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1}$ ， $\underline{\hspace{4cm}}$ 。

(b) $y'' + 4y = \sin^2 2x, y(\pi) = y'(\pi) = 0$ ， $\underline{\hspace{4cm}}$ 。

3. 求下列各小題

(a) $F(s) = \frac{e^{-s} + e^{-2s}}{s^2 - 3s + 2}$ 的反拉普拉斯轉換，

$\underline{\hspace{4cm}}$ 。

(b) $f(t) = te^{-3t} \sin 2t$ 的拉普拉斯轉換，

_____。

(c) $y(t) = e^{-t} - 2 \int_0^t \cos(t-u)y(u)du$ ， $y(t) =$

_____。

三、計算題(40%)

1. (a) 利用 Fourier 級數展開 $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$

(b) 使用(a)的結果證明 $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 和 $\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 。

2. 若 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

(a) 求其 Fourier 積分式； (b) 求 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ；

(c) 利用 Parseval 恆等式，求 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ 。

3. 求 $\int_C xy dx + x^2 dy$ ，其中 $C: y = 2x^3, -1 \leq x \leq 2$ 。

4. (a) 求 $\int_C \bar{z} dz$ ，而 $C: |z| = 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ；

(b) 求 $\int_C \frac{1}{z^3(z+4)} dz$ ，而 (i) $C: |z| = 2$ ；(ii) $C: |z+2| = 3$ 。

崑山科技大學九十二學年度碩士班招生考試

所別：電子工程研究所

考試科目：工程數學

一、(a) 求 $y'' - y' + y = 2\sin 3x$ 之特解(particular solution) (10%)

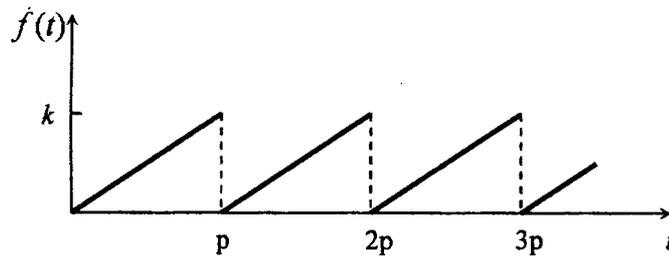
(b) 求 $4x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} + y = 0$ 之通解(general solution) (10%)

二、週期函數之 Laplace 轉換

(a) 請證明，一個週期為 p 的片段連續函數 $f(t)$ 之 Laplace 轉換為

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt \quad (15\%)$$

(b) 求出如圖一所示之週期函數之 Laplace 轉換。 (10%)



圖一

三、請求出下列矩陣 A 之特徵值(eigenvalues)及特徵向量(eigenvectors)

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (15\%)$$

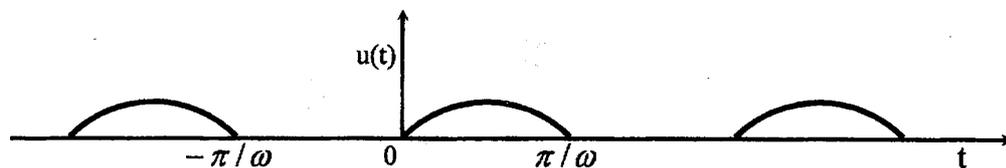
四、求線積分 $I = \int_C (3x^2 dx + 2yz dy + y^2 dz)$ 由 $A:(0,1,2)$ 至 $B:(1,-1,7)$

(10%)

五、求週期函數 $u(t)$ 之 Fourier 級數

(15%)

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } -L < t < 0 \\ E \sin \omega t & \text{if } 0 < t < L \end{cases} \quad \text{週期 } p = 2L = \frac{2\pi}{\omega}, \quad L = \frac{\pi}{\omega}$$



圖二

六、求沿著圓 $C: |z| = 3/2$ (逆時針方向) 之路徑對 $g(z) = \frac{\tan z}{z^2 - 1}$ 積分 (15%)

崑山科技大學九十三年學年度碩士班招生考試

所別：電子工程研究所

考試科目：工程數學

1. 求解微分方程式

$$y^2 \frac{dy}{dx} = x^2 + \frac{y^3}{x}; y(3) = 4$$

2. 請利用拉普拉斯轉換中的摺積定理(convolution theorem)求解下列初值問題， $y''+10y'+24y=f(t)$ ； $y(0)=0$ ， $y'(0)=-2$

3. 求解反拉普拉斯轉換

$$(1) \frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} \quad (2) \frac{se^{-2s}}{s^2+9}$$

4. 三向量 \vec{F} 、 \vec{G} 、 $\vec{F}+\vec{G}$ 構成一三角形，若 $\|\vec{F}+\vec{G}\|^2 = \|\vec{F}\|^2 + \|\vec{G}\|^2$ ，請利用向量方法，證明該三角形為直角三角形。

5. 設 θ 為 \vec{F} 和 \vec{G} 之夾角，請證明 $\sin \theta = \frac{\|\vec{F} \times \vec{G}\|}{\|\vec{F}\| \|\vec{G}\|}$

6. 求解 $f(x) = \begin{cases} -4 & -\pi \leq x \leq 0 \\ 4 & 0 < x < \pi \end{cases}$ 的傅立葉級數。

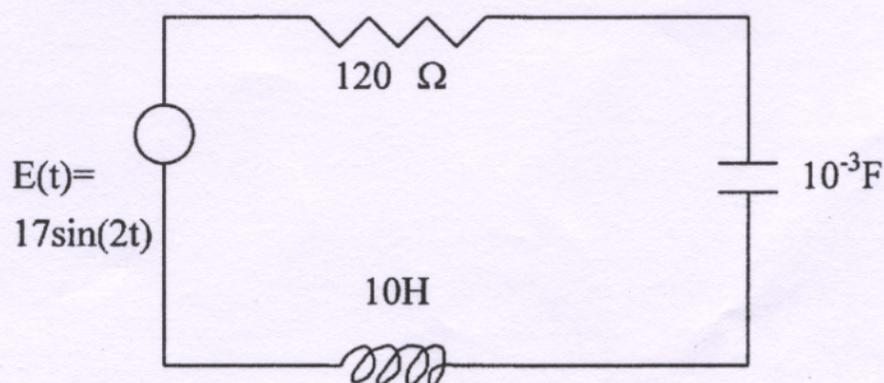
7. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，求其固有值(eigenvalue)和固有向量(eigenvector)， $\det A = ?$ ，

反矩陣 $A^{-1} = ?$

8. 求 $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{R}$ ，其中 $\vec{F} = x\hat{i} - \hat{j} + z\hat{k}$ ， $\vec{R} = t\hat{i} + t\hat{j} + t^3\hat{k}$ ， $0 \leq t \leq 1$ 。

9. 考慮下圖， $q_c(0) = \frac{1}{2000}$ ， $q_c'(0) = 0$ ，求穩態解。電位 $E(t) = 17 \sin(2t)$ 伏特，驅動

電路於零時間，電流為零，電容器的電荷為 $\frac{1}{2000}$ 庫侖。



崑山科技大學 94 學年度碩士班招生考試

餘
卷

所別：電子工程研究所

考試科目：工程數學

說明：共 20 題填充題(每題 5 分)

1. 解微分方程式 $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$, 得 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 已知拉氏變換(Laplace Transform), $Y(s) = \frac{s+1}{s^3+s^2-6s}$, 求 $y(t) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 求行列式值, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, 求 A 之特徵值(eigenvalues)分別為 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 則求 $\lambda_1 * \lambda_2 * \lambda_3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, A 的秩 $\text{rank}(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 求拉氏轉換 $\mathcal{L}\{t \sin t\} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 若 $f(x) = x^2/2$, $-\pi < x < \pi$, 週期 $p = 2\pi$, 若其 Fourier 級數為 $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 試問 $a_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 求解 $dy/dx = 1 + y^2$ 。

9. 求解 $dy/dx = (x+y)^2$ 。

10. $y'' + 2y' - 3y = 4e^{2x}$ 。

11. 求拉氏轉換 $\mathcal{L}\{\cos^2 \omega t\} = ?$

12. 求拉氏轉換 $\mathcal{L}\{(t^2+1)u(t-5)\}=?$
13. $f(t)=|t| \quad -\pi \leq t \leq \pi$, 求 $f(t)$ 的 Fourier Series。
14. $f(t)=\delta(t)$, 求 $f(t)$ 的 Fourier transform。
15. $z^4=1$ 求 z 的根。
16. $A=[1 \ 2 \ 3] \quad B=[2 \ 3 \ 1]$ Find $(A \cdot B)$ 。

17. 已知矩陣 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, 矩陣 $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & 10 & -3 \end{bmatrix}$, 若 $AB=C$, 求矩陣 A 內所有元素(element)

的總和=_____。

18. 求以 $A(-1, 0, 1), B(2, 1, 5), C(2, -1, 4), D(-2, 1, 4)$ 為頂點之四面體之體積=_____。

19.
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 2y_1 - 3y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -2y_1 + y_2 \end{cases} \quad y_1(0) = 8, y_2(0) = 3, \text{ 微分方程的特解為: } y_1=? y_2=?$$

20.
$$f(t) = \begin{cases} -k & -\pi < t < 0 \\ k & 0 < t < \pi \end{cases}$$

且 $f(t+2\pi)=f(t)$, 求 $f(t)$ 的 Fourier Series (寫出前兩項即可)。

崑山科技大學 95 學年度研究所碩士班招生考試入學招生試題卷

招生所別：電子工程研究所

考試科目：工程數學

說明：一、共 20 題填空題(每題 5 分)

二、答案請依題號順序寫於答案卷上

三、試題卷(共 2 頁)請與答案紙一併繳回，否則扣 20 分

(1). $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, A 的秩 $\text{rank}(A) = ?$

(2) 請求出矩陣 $\begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ 之特徵值 λ_1, λ_2 分別為何?

(3) 求出二次型： $3x_1^2 + 4\sqrt{3}x_1x_2 + 7x_2^2 = 9$ 其圖形為何? (圓、橢圓、雙曲線、拋物線或直線).

(4) 微分方程式 $y' + 2y = x$, $y(x) = ?$

(5) 拉氏轉換 $\mathcal{L}[t \sin t] = ?$

(6) 解微分方程式 $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$, 得 $y(x) = ?$

(7) 已知拉氏變換(Laplace Transform), $Y(s) = \frac{s+1}{s^3+s^2-6s}$, 求 $y(t) = ?$

(8) 已知矩陣 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, 矩陣 $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & 10 & -3 \end{bmatrix}$, 若 $AB=C$, 求矩陣 A 內

所有元素(element)的總和 = ?

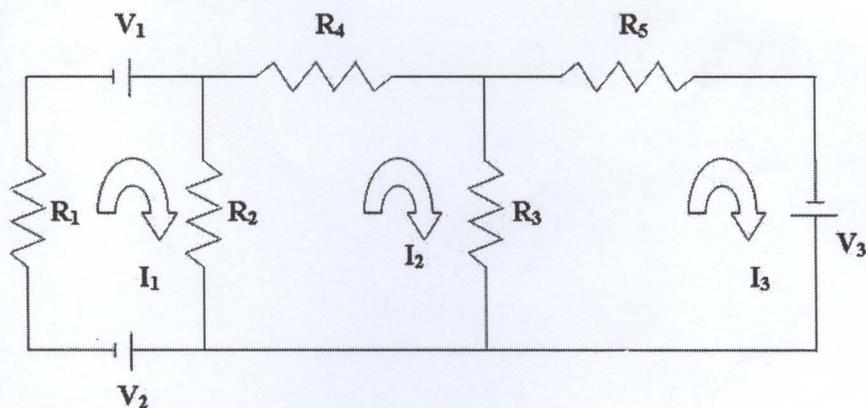
- (9) 求以 $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 1, 5)$, $C(2, -1, 4)$, $D(-2, 1, 4)$ 為頂點之四面體之體積 = ?
- (10) 同時垂直於向量 $\bar{A} = 4\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ 及 $\bar{B} = -2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ 之單位向量為 $a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ 求 $a * b * c = ?$
- (11) 求週期函數 $f(t)$ 之傅立葉級數(Fourier Series), $f(t)=t$, $(-1 < t < 1)$, $T=2$, 則 $f(t)=?$ (寫出前四項)
- (12) 求解 $dy/dx=1+y^2$, 則 $y = ?$
- (13) 解 $y''+2y'-3y=4e^{2x}$, 則 $y(x)=?$
- (14) $f(t)=\delta(t)$, 求 $f(t)$ 的 Fourier transform $F(\omega)=?$
- (15) $A=[1 \ 2 \ 3]$ $B=[3 \ 2 \ 1]$ Find $(A \cdot B) = ?$
- (16) 解微方 $dy/dx = 2x$, $y(1)=0$, 則 $y(x)=?$
- (17) 求 $F(s)=5/s - 1/s^6$ 之拉普拉斯反轉換, $f(t) = ?$
- (18) 已知 $z = r(\cos\theta + j \sin\theta)$, 試求 $z^n = ?$
- (19) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, 則 $A^2 = ?$
- (20) 試求 $f(t) = e^{-t}$, $t > 0$ 之頻譜 $|F(\omega)| = ?$

招生所別：電子工程研究所碩士班

考試科目：工程數學

說明：共 20 格填充題(每題 5 分)，請依題號順序作答，並將答案填入 答案卷 之答案欄內

- 一. 解微分方程式 $y'' = 1, y(0) = 1, y(2) = 4, y = \underline{(1)}$ 。
- 二. 解微分方程式 $x \cos x dx + (1 - 6y^5) dy = 0, y(\pi) = 0, y = \underline{(2)}$ 。
- 三. 解微分方程式 $x^2 y'' - xy' + 5y = 0, (x > 0), y = \underline{(3)}$ 。
- 四. 已知 $V_1 = 1V, V_2 = 3V, V_3 = 4V, R_1 = 2\Omega, R_2 = 4\Omega, R_3 = 3\Omega, R_4 = 1\Omega, R_5 = 4\Omega$. 試求 $I_1 = \underline{(4)}, I_2 = \underline{(5)}, I_3 = \underline{(6)}$ 。



- 五. 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $\det(A)$ (行列式值) = (7)。
- 六. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, 求 A 的特徵多項式 = (8), 其特徵值(eigenvalue)分別為 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 求 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \underline{(9)}$ 。
- 七. 求空間 R^4 中兩向量 $u = (1, 0, 0, 1)$ 與 $v = (0, 1, 0, 1)$ 之間的夾角 = (10)。
- 八. 求矩陣相乘, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \underline{(11)}$ 。
- 九. 求 $f(t) = (t+4)^2 + \sin 5t$ 拉普拉斯轉換 = (12)。
- 十. 求 $F(s) = \frac{2s+4}{s^2-4s+4}$ 的反拉普拉斯轉換 = (13)。
- 十一. 求 $F(s) = \frac{2s+4}{s^2-4s+5}$ 的反拉普拉斯轉換 = (14)。
- 十二. 若 A、B、C 三點的座標分別為 $(6, 1, 1)$ 、 $(7, -2, 4)$ 、 $(8, -4, 3)$, 求向量 \vec{AB} 和 \vec{AC} 所構成的平行四邊形面積 = (15)。
- 十三. 求矩陣 $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ 的反矩陣 = (16)。
- 十四. 求 $f(x) = \begin{cases} -4 & -\pi \leq x < 0 \\ 4 & 0 < x < \pi \end{cases}$ 的傅立葉級數 = (17)。
- 十五. 求 $z^6 = 1$ 所有的根 = (18)。
- 十六. 解下列微分方程式： $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ 。 $y = \underline{(19)}$ 。
- 十七. 求 $\int_C xy dx + x^2 dy = \underline{(20)}$ 。路徑 C 為 $y = 2x^3, -1 \leq x \leq 2$ 。