單元 10　留數積分

【例題 1】

Find residue of $f(z)$ at $z=0$, $f(z)=\frac{1}{z^3}\csc z\cdot\csc hz$.【90 海洋電機】

【參考解答】$\frac{1}{z^3}\csc z\,\mathrm{csch}\, z=\frac{1}{z^5}\frac{1}{1-\frac{1}{90}z^4+\cdots}=\frac{1}{z^5}+\frac{1}{90}\frac{1}{z}+\cdots$，

$\mathrm{Res}(0)=\frac{1}{90}$。

【例題 2】

(1) Express $\cos(\frac{z}{z-1})$ into a power series for some region of the complex plane.

(2) Compute the following complex integrals $\int_{C_1}\cos(\frac{z}{z-1})dz$ and $\int_{C_2}\cos(\frac{z}{z-1})dz$ where C_1 and C_2 are counterclockwise contours (circles) with center $z=0$ and radii of 0.5 and 2, respectively. 【89 清大電機】

【參考解答】

(1) $\cos(\frac{z}{z-1})=\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-1)^{2n}-\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-1)^{-(2n+1)}$

(2) $\int_{C_1}\cos(\frac{z}{z-1})dz=0$

因為 $\int_{C_2}\cos(\frac{z}{z-1})dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(1)$

又 $\mathrm{Res}(z=1)=-\sin 1$

所以 $\int_{C_2}\cos(\frac{z}{z-1})dz=-2\pi i\sin 1$

【例題 3】

Evaluate $\oint_C z^6 \sin\frac{1}{z}dz$, where C is the circle $|z|=1$ described in the positive direction.【91 中央機械】

【參考解答】$\text{Res}(0)=-\frac{1}{7}$，$z=0$ 為本性奇點。

【例題 4】

Compute $\oint_\Gamma f(z)dz$, where $f(z)=(2jz-\sin z)/(z^3+z)$ and Γ is a closed path that enclosed 0, i, and $-i$.【91 台科電子】

【參考解答】

$$\oint_\Gamma f(z)dz=\oint_\Gamma \frac{2jz-\sin z}{z(z^2+1)}dz=2\pi i[\text{Res}(0)+\text{Res}(i)+\text{Res}(-i)]$$

$$\text{Res}(0)=0, \text{Res}(i)=\frac{1}{2}(2+\sin i), \text{Res}(-i)=-\frac{1}{2}(2+\sin i)$$

【例題 5】

Evaluate $\oint_C 1/(1+z^2)dz$ if C is any piecewise-smooth simple closed curve in the complex plane. Consider all possible cases, which do not pass through i or $-i$.【91 台科電機、91 中興土木】

【參考解答】當 $-i$、i 在 C 外，$\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz=0$；

當 $-i$ 在 C 內，i 在 C 外 $\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz=-\pi$；

當 $-i$ 在 C 外，i 在 C 內 $\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz=\pi$；

當 $-i$、i 在 C 內，$\oint_C \frac{1}{z^2+1}dz=0$。

【例題 6】

若 C 代表複平面上的圓 $|z|=4$，請計算 $\oint_C \frac{dz}{e^z-e^{-z}}=?$【91 中央土木】

【參考解答】$\oint_C \frac{1}{e^z-e^{-z}}dz=-2\pi i$

【例題 7】

Evaluate $\oint_C \frac{1}{z} dz$, wher C is any simple closed contour in the z-plane.

【91 清大動機】

【參考解答】當原點 $z=0$ 在封閉曲線 C 外：$\oint_C \frac{1}{z} dz = 0$

當原點 $z=0$ 在封閉曲線 C 內：$\oint_C \frac{1}{z} dz = 2\pi i$

當原點在封閉曲線 C 上，定義積分主值 $\oint_C \frac{1}{z} dz = i\pi$

【例題 8】

Integrate a complex function $f(z)$ around C, where

$f(z) = \frac{(1+z)\sin z}{(2z-1)^2}, C: |z-i| = 2$.【90 朝陽資訊】

【參考解答】$\oint_C \frac{(1+z)\sin z}{(2z-1)^2} dz = \frac{\pi i}{2}[\sin\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{1}{2}]$

【例題 9】

Find the value of the integral $\oint_C \frac{(3z+2)^2}{2z^3+3z^2-5z} dz$, around the positively oriented circle C: $|z| = 3$.【91 暨南電機】

【參考解答】$\oint_C \frac{(3z+2)^2}{2z^3+3z^2-5z} dz = 9\pi i$

【例題 10】

Let the improper integral $I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - a^2}$, where a is real and positive.

(1) Find $I(a)$ by taking the Cauchy principal value.

(2) Find $I(a)$ by taking $I(a) = \lim_{r \to 0} I(a + ir)$.

(3) Find $I(a)$ by taking $I(a) = \lim_{r \to 0} I(a - ir)$, where r is positive and real.

【89 中央太空】

【參考解答】(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - a^2} = 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-(a+ir)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2(a+ir)}$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-(a-ir)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{-2(a-ir)} = -\pi i \cdot \frac{1}{a-ir}$

【例題 11】

(1) Evaluate the integral $\oint f(z)dz$, where $f(z) = \frac{e^z}{z}$ and C is a unit circle about the origin.

(2) Use the above result to find the following integral

$\int_0^{\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(\sin\theta) d\theta$ 【90 北科光電】

【參考解答】(1) $\oint_C f(z)dz = 2\pi i$ (2) $\oint_C f(z)dz = 2\pi i$

【例題 12】

(1) Find the series sum and domain of convergence for the complex series $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$.

(2) Let $f(z)$ be the series sum of the above series. What are the residues of $f(z)$ at $z=0$ and $z=\infty$.【87 台大機械】

【參考解答】(1) $\frac{1}{2} < |z| < 2$ is the domain of convergence

(2) $\text{Res}(\infty) = -\frac{3}{2}$